

Drue
FOLGE, 1951, BAND 9, HEFT 2-4

SEP 26 1951

PHYSICS
LIBRARY

ANNALEN DER PHYSIK

Gegründet 1799 durch F. A. C. Gren
Fortgeführt durch L. W. Gilbert, J. C. Poggendorff,
G. und E. Wiedemann, P. Drude,
W. Wien, M. Planck, E. Grüneisen

Der ganzen Reihe 444. Band

Kuratorium:

W. GERLACH, CHR. GERTHSEN, F. HUND, W. KOSSEL,
M. v. LAUE, W. MEISSNER, R. W. POHL, R. ROMPE,
R. SEELIGER, A. SOMMERFELD †, W. WEIZEL

Herausgegeben von

F. MÖGLICH
Berlin



JOHANN AMBROSIUS BARTH / VERLAG / LEIPZIG

Redaktionsschluß am 30. Juni 1951

Inhalt

Hans Wolter, Kiel: Zur Abbildung von Amplituden-, Phasen- und Polarisationsobjekten in einem einzigen farbigen Bilde. (Mit 2 Abbildungen und einer mehrfarbigen Tafel)

Hans Wolter, Kiel: Interferenzgerät zur Umwandlung eines Mikroskops in ein Interferenzmikroskop. (Mit 1 Abbildung)

P. Gombás, Budapest: Über die Zustandsgleichung der Alkalimetalle. (Mit 4 Abbildungen)

G. Höhler, Berlin: Zur Theorie der verallgemeinerten Wellengleichung

G. Höhler, Berlin: Ein Beispiel zur klassischen Feldmechanik

Frank Rose, Pretzfeld (Oberfranken): Zur Frage der Widerstandsschichtung in Kupferoxydul-Gleichrichtern. I. Untersuchungen an Massivplatten mit „sperrfreier“ Kontaktierung. (Mit 14 Abbildungen)

Frank Rose, Pretzfeld (Oberfranken): Zur Frage der Widerstandsschichtung in Kupferoxydul-Gleichrichtern. II. Untersuchungen an Gleichrichterscheiben. (Mit 14 Abbildungen)

H. Müller, Jena: Ein Verfahren zur genäherten Bestimmung der Lage von Energiebändern in Kristallen. (Mit 13 Abbildungen)

G. Heber, Jena: Zur Frage der magnetischen Momente der Nukleonen. I ..

G. Heber, Jena: Zur Frage der magnetischen Momente der Nukleonen. II ..

Ernst Golling, München: Die Absorptionsspektren von Chromalaunmischkristallen. (Mit 7 Abbildungen)

W. Kofink, Stuttgart: Zur Theorie des gegabelten Verdichtungsstoßes. (Mit 2 Abbildungen)

Für diese Zeitschrift werden grundsätzlich nur Arbeiten angenommen, die vorweder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung geht das alleinige Recht der Vervielfältigung, Verbreitung und Übersetzung einschließlich des Rechts der Veranstaltung von Sonderdrucken auf den Verlag über. Von jeder Arbeit liefert der Verlag 75 Sonderabzüge kostenlos.

Es wird gebeten, Manuskripte an Herrn Prof. Dr. F. Mögliche, (1) Berlin-Buch, Lützberger Weg 74, einzusenden.

Die Redaktion bittet, die Manuskripte *druckfertig* einzuliefern und in den Konserven den bisherigen Raum des Textes nicht zu überschreiten. Die Zeichnungen sind in sorgfältiger Ausführung auf besonderen Blättern beizulegen.

Bei den *Zitaten* wolle man die Abkürzungen der Zeitschriftenstitel nach dem *Zeichnis* wählen, das jedem Jahrgang der „Physikalischen Berichte“ vorangestellt ist.

Die Zeitschrift erscheint in Bänden mit 8 Heften, die zwangslässig ausgegeben werden. Die Lieferung erfolgt durch den Sortimentsbuchhandel, in Ausnahmefällen unmittelbar vom Verlag. Der Bezugspreis beträgt je Band DM 34.— (U. S. \$ 8.16) zuzüglich Postgebühren. Einzelpreis dieses Heftes DM 15.60 (U. S. \$ 3.75).

Die Lieferung erfolgt bis zur Abbestellung, die nur für das Ende eines Bandes ausgesprochen werden kann.

polari-
und

ps in

(Mit

tung

mit

tung

hter-

von

I ...

II

isch-

(Mit

die vor-

nahme der

lfältigkei-

n Sonde-

derabse-

h, Linden

in Kon-

ungen sind

dem V

estellt

n werden

unmit-

ig) zusätz-

s Baud-

ANNALEN DER PHYSIK

6. FOLGE * BAND 9, HEFT 2-4 * 1951

Zur Abbildung von Amplituden-, Phasen- und Polarisationsobjekten in einem einzigen farbigen Bilde

Von Hans Wolter

(Mit 2 Abbildungen und einer mehrfarbigen Tafel)

Inhaltsübersicht

Um Amplituden- und Phasenobjekte und schließlich auch Polarisationsobjekte in einem einzigen Bilde beobachtbar zu machen, wird für einen Teil des Lichtes das Phasenkontrastverfahren und für einen anderen das Hellfeldverfahren realisiert. Das Licht kann hierfür entweder in zwei Teilbereiche des Spektrums oder in verschiedenen polarisierte Anteile eingeteilt werden. Im letzten Falle werden die Polarisationsunterschiede im Bilde in Farben umgewandelt, z. B. durch Einbringen einer Rotationsdispersion zeigenden Quarzplatte. Dann wird gleichsam nebenbei auch die gleichzeitige Beobachtbarkeit von Polarisationsobjekten gewonnen. In jedem Falle kann das Ziel nur unter Verwendung der Farben erreicht werden, da die eindimensionale Grauskala nicht ausreichende Kennzeichnungsmittel für die große Mannigfaltigkeit der Objekte bietet.

Der Anhang bringt u. a. ein Verfahren, das außer den drei genannten Objektarten auch Schlieren deutlicher sichtbar macht als das Phasenkontrastverfahren allein. Im letzten Abschnitt des Anhangs wird eine leicht selbst anzufertigende Vorrichtung beschrieben, die einen Teil des Gesichtsfeldes im Hellfeld und einen anderen Teil im Phasenkontrast zeigt.

1. Das Ziel

Seit Zernike¹⁾ mit Schaffung des Phasenkontrastverfahrens nichtabsorbierende Objekte unter dem Mikroskop in einer bis dahin unerreichten Deutlichkeit sichtbar machte, steigerten sich die Wünsche der Mikroskopiker fortlaufend, und heute wünscht der Praktiker möglichst alle Objekte zu sehen, die sich überhaupt von der Umgebung durch irgendeine Einwirkung auf das Licht unterscheiden. Eine solche Einwirkung kann die Amplitude oder die Phase oder den Polarisationszustand des Lichtes betreffen, und man unterscheidet daher zweckmäßig Amplituden-, Phasen- und Polarisationsobjekte. Beispiele für die ersten sind alle absorbierenden Objekte, für Phasenobjekte z. B. ungefärbte lebende Bakterien, Zellen und deren Bestandteile wie Chromosomen; Polarisationsobjekte sind alle optisch aktiven oder doppelbrechenden Stoffe, wie viele Kristalle oder gewisse Fibrillen in histologischen Präparaten.

¹⁾ F. Zernike, *Physica* 1, 689 (1934); A. Köhler u. W. Loos, *Naturwiss.* 29, 51 (1941).

Wir wollen zunächst überlegen, wie weit es prinzipiell überhaupt möglich scheint, alle drei Arten von Objekten in einem einzigen Bilde sichtbar zu machen. Zu kennzeichnen sei also eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit, gebildet durch die Kombination der drei linearen Kontinua „Amplitude“, „Phase“, „Polarisationsrichtung“. Ein Bild, das nur die eindimensionale Grauskala als Kennzeichnungsmittel benutzt, kann daher von vornherein nicht dem oben formulierten Wunsch entsprechen²⁾. Nimmt man die Farbe hinzu, so kann man durch Farbton, Farbsättigung und Helligkeit ein dreidimensionales Kontinuum kennzeichnen und also mit einem farbigen Bilde grundsätzlich zum Ziel kommen.

Die Dimensionszahl 3 erscheint aber als unüberschreitbare Grenze für eine mit unserem Auge in einem Bilde erfaßbare Mannigfaltigkeit. Damit ist sofort vorauszusehen, daß über die formulierte Aufgabe hinausgehende Wünsche — etwa nach eineindeutig gekennzeichneter Abbildung auch vielfarbiger Objekte zugleich mit Phasen- und Polarisationsobjekten in einem Bilde grundsätzlich unerfüllbar sind.

Daß freilich bei Verzicht auf die Eindeutigkeit der Abbildung auch vielfarbige Objekte zugleich mit Phasenobjekten und Polarisationsobjekten wenigstens sichtbar werden, zeigt die Praxis der unten beschriebenen Verfahren. Ebenso werden dort Amplituden-, Phasen- und Polarisationsobjekte deutlich genug für praktische Zwecke auch dann, wenn wir nicht streng die dreidimensionale Kennzeichnung durchführen. Die Ursache liegt darin, daß nur ganz selten vorkommende Kombinationen unsichtbar werden und vor allem durch Regelmöglichkeiten der Unsichtbarkeitspunkt gerade so gelegt werden kann, daß keines der vorkommenden Objekte davon betroffen wird.

2. Die zu überwindenden Schwierigkeiten

Das oben gesteckte Ziel kann nicht einfach durch Einbau eines Polarisators und eines Analysators in ein Phasenkontrastmikroskop erreicht werden. Dies liegt an einer Eigenschaft des Phasenkontrastverfahrens, die dem Leser an Hand der Abb. 1 in Erinnerung gebracht werden soll.

Der rechte obere Teil der Abbildung zeigt die mit einem gewöhnlichen Mikroskop (Hellfeld) hergestellte Mikrophotographie eines sogenannten „Amplitudengitters“, das in eine schwarze Lackschicht (auf einer Glasplatte) mit der Teilmaschine geschnitten wurde. Links war ein kongruentes Gitter in eine klar durchsichtige Zaponlackschicht geschnitten worden; es ist in diesem Hellfeldbilde unkenntlich — abgesehen von den dunkel wiedergegebenen Kanten der Lackstreifen.

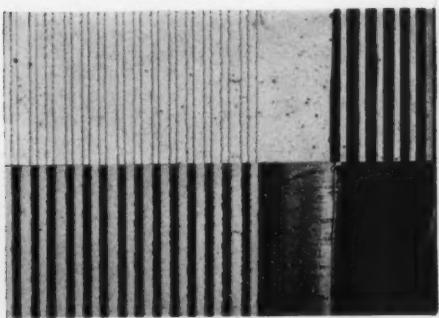


Abb. 1. Amplitudengitter (rechts) und Phasengitter (links), aufgenommen a mit Hellfeld, b mit Phasenkontrastverfahren

²⁾ Siehe jedoch Anhang b und c!

cheint, kenn-
Kom-
nungs-
unsch
Farb-
d also
ne mit
raus-
nach
gleich
füllbar
arbig
sicht-
werden
tische
nung
abina-
sicht-
Ob-
tors
Dies
Hand
g ge-
l der
inem
Hell-
hoto-
, Am-
eine
einer
chine
s war
eine
lack-
n; es
e un-
den
anten

Das Phasenkontrastbild darunter (1b) zeigt das Phasengitter deutlich; aber hier ist nun das Amplitudengitter undeutlich. Wie diese Eigenschaft zwangsläufig aus dem Wesen des Phasenkontrastverfahrens folgt, ist in Zernikes Arbeiten und denen anderer Autoren^{1,3)} im einzelnen auseinandergesetzt worden.

Werden also auf diese Weise Amplitudenobjekte bereits von dem Phasenkontrastverfahren nicht wiedergegeben, so ist auch der Einbau eines Polarisators und eines Analysators in ein Phasenkontrastmikroskop nicht sehr erfolgreich, da die Polarisationsobjekte sich dabei zunächst in Amplitudenunterschieden äußern und im Phasenkontrastbild nicht deutlich werden.

Besser ist das bereits bei Kombinationen der Phasenkontrasteinrichtung mit einem Polarisationsmikroskop, das eine Glimmerplatte (z. B. rot erster Ordnung) enthält. Es wandelt Polarisationsunterschiede in Farbunterschiede um und erlaubt daher eine Kombination mit dem Phasenkontrast; doch fehlt dann immer noch die gleichzeitige Anzeige der Amplitudenobjekte.

Alle drei Objektarten werden sichtbar aber bereits mit einem Mikroskop, das nicht komplizierter aber wirksamer als die oben genannte Vorrichtung ist. Es sei als Beispiel eines farbigen Kombinationsverfahrens im Sinne unserer Aufgabe näher beschrieben.

3. Beispiel eines farbigen Kombinationsverfahrens mit handelsüblichem Phasenkontrastobjektiv

Köhler und Loos¹⁾, Osterberg und andere⁴⁾ haben Vorrichtungen angegeben, die einen Wechsel zwischen Hellfeld- und Phasenkontrastbild durch Drehen eines Polarisators gestatten. Das in diesem Abschnitt zu beschreibende Verfahren überlagert ein ähnlich wie bei Köhler und Loos zustandekommendes Phasenkontrast- und ein Hellfeldbild zu einem einzigen Bilde, dessen Strukturelemente sich zunächst im Polarisationszustande voneinander unterscheiden, und wandelt anschließend diese dem Auge nicht unmittelbar erkennbaren Polarisationsunterschiede in Farbunterschiede um.

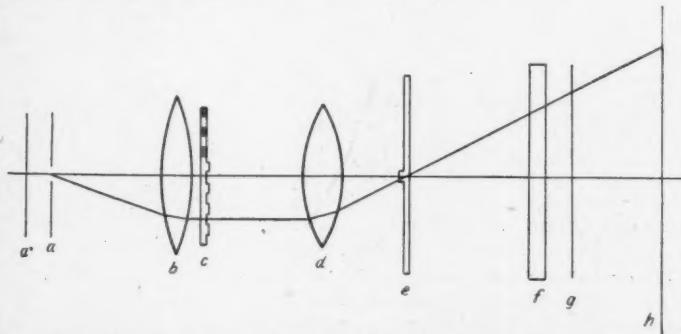


Abb. 2. Apparatur zur gleichzeitigen Beobachtung von Amplitudenobjekten, Phasenobjekten und Polarisationsobjekten in einem farbigen Bilde. a* Polarisator; a „Spalt“ mit durchsichtigen, polarisierenden Spaltbacken; b Kondensor; c Objekt; d Objektiv e handelsübliche Zernikeplatte; f Quarzplatte; g Analysator; h Beobachtungsebene

³⁾ H. Wolter, Naturwiss. 37, 272 (1950); Ann. Physik (6) 7, 33 (1949); 147 (1949).

⁴⁾ H. Osterberg, J. Opt. Soc. Amer. 37, 726 (1947).

Die Abb. 2 gibt eine Skizze der Apparatur, die als Mikroskop oder auch als makroskopische Vorrichtung zu denken sei. Enthält die Apparatur die Teile a^* , f und g nicht, so bleibt eine gewöhnliche Phasenkontrastvorrichtung, sofern wir a als gewöhnlichen Spalt deuten. Nun ist a aber ein Spalt, dessen Spaltbacken nicht aus undurchlässigem Material, sondern aus Polarisationsfolie^{*)} (beide Spaltbacken gleichartig polarisierend) bestehen. Setzen wir einen Polarisator a^* in den Strahlengang, so können wir mit seiner Hilfe die „Spaltbacken“ wahlweise undurchlässig oder durchlässig machen und somit im ersten Falle ein Phasenkontrastbild, im zweiten Falle ein Hellfeld erzeugen. Lassen wir den Polarisator a^* fort, so überlagert sich in der Bildebene ein Hellfeldbild der einen Polarisationsrichtung mit einem Phasenkontrastbilde der dazu senkrechten Polarisationsrichtung. Die dadurch im Bilde vorhandenen Polarisationsunterschiede werden in Farbunterschiede umgewandelt mit Hilfe des „Polarisationsdetektors“ f, g , der aus einer etwa 4 mm dicken Quarzplatte (senkrecht zur optischen Achse geschnitten) und einem Analysator besteht. Wie seit langem bekannt ist und u. a. in Ann. Phys. (6) 8, 7, (1950) im einzelnen auseinandergesetzt wurde, gibt dieser Detektor jede Polarisationsrichtung durch einen Farbton des Farbenkreises und den Polarisationsgrad durch die Farbsättigung an. Statt von Polarisationszuständen wollen wir im folgenden daher der Einfachheit halber sogleich von Farben sprechen.

Liegen nur Phasenobjekte vor, so gibt das Hellfeldbild gleichmäßige Helligkeit, bei einer bestimmten Analysatorstellung z. B. in grüner Farbe. Das Phasenkontrastbild zeigt die Phasenobjekte z. B. dunkel auf hellem Grunde und ist bei der gleichen Analysatorstellung purpur gefärbt. Die Überlagerung führt zu reinem Grün für die Phasenobjekte und einem Weiß für den Rest des Gesichtsfeldes. Die von dem Phasenkontrastverfahren her bekannten hellen Höfe^{*)} freilich sorgen dafür, daß die grün gefärbten Objekte hellpurpurfarbige Höfe erhalten, die den Kontrast noch erhöhen. Kleine Zwischenräume zwischen vielen Objekten erscheinen so hellpurpur bis rosa gefärbt. Die Tafel I, Abb. a, zeigt links oben eine solche Aufnahme desselben Phasengitters, das in Abb. 1 mit reinem Phasenkontrastverfahren bzw. Hellfeldverfahren abgebildet war.

Amplitudenobjekte ergeben im Phasenkontrastbild gleichmäßig purpurfarben ausgeleuchtetes Gesichtsfeld, im Hellfeldbild erscheinen sie dunkel auf grünem Grunde; sie müssen daher in der Überlagerung dunkelpurpur auf grauem Grunde erscheinen.

Zugleich vorliegende Polarisationsobjekte müssen den Farbton ändern; doch wären sie nicht erkennbar, wenn man ein von Phasenobjekten und Amplitudenobjekten freies Objekt hätte — solange man Hellfeld und Phasenkontrastbild gleich hell macht; denn die Überlagerung der beiden Bilder führt dann wieder zu natürlichem Licht und nach der Farbumwandlung zu Weiß. Auf das natürliche Licht nehmen aber Polarisationsobjekte meist keinen merkbaren Einfluß. Die Schwierigkeit wird zwangsläufig dadurch behoben, daß bei dem Verfahren automatisch das Hellfeld intensitätsmäßig überwiegt, von Objekten freie Gesichtsfeldteile also bereits leicht grünlich gefärbt erscheinen und bei Einfügen von Polarisationsobjekten umgefärbt werden.

^{*)} Besonders bewährten sich für alle Arbeiten dieser Art die Polarisationsfolien des Laboratoriums Erwin Käsemann, Oberaudorf am Inn.

^{*)} E. Menzel, Optik 5, 385 (1949); H. Wolter, Ann. Physik (6) 34, 147 (1950), Naturwiss. 37, 273 (1950).

als
r*,
r a
ken
lt-
in
siso
en-
r a*
ons-
one
den
. g,
ge-
. a.
eser
und
zu-
ben

keit,
kon-
der
nem
ldes.
rgen
dem
er-
eine
asen-

rpur-
l auf
auem

doch
inden-
stbild
er zu
rlche
Die
atisch
e also
tions-

en des
(1960),

B
D
ritter
ersch
Phase
ebenf
Ampl
Hellfe

D
kann
des p
Statt
itelle
mene
Aufna
auf d
relati
Repre

a
E
Dreh
streif
bette
richtu
sation
kontro

Eduard Mörike

W
Arhei

*]
sichtb
7)
wurde
Ernst

41

Die Farbtafel I, Abb. a, zeigt außer dem Phasengitter und dem Amplitudengitter zugleich zwei Glimmerblättchen. Wo sie das Phasengitter überdecken, erscheinen Phasenobjekte und Zwischenräume durch sie umgefärbt. Wo kein Phasen- oder Amplitudenobjekt liegt, sind die Polarisationsobjekte ebenfalls durch Umfärbung deutlich erkennbar. Die dunklen Streifen des rechten Amplitudengitters erscheinen wegen der intensitätsmäßigen Überlegenheit des Hellfeldbildes in besonders dunkler Purpurfarbe*).

Das Verhältnis zwischen Hellfeldintensität und Phasenkontrastintensität kann man beliebig variiieren, indem man den für das Hellfeld durchlässigen Teil des polarisierenden Spaltes a (Abb. 2) mehr oder weniger durch Blenden abdeckt. Statt dessen kann man auch einen drehbaren Polarisator a^* in den Strahlengang stellen und nach Wunsch auch noch zusätzlich den hier unpolarisierend angenommenen Teil des Spaltes a anders polarisierend als die Spaltbacken ausführen. Aufnahmen mit diesem und ähnlich abgewandelten Verfahren zeigte Verfasser auf der Tagung der Deutschen Physikalischen Gesellschaft in Bad Nauheim; die relativ geringen Unterschiede gegenüber dem Bilde I, a würden die Kosten der Reproduktion hier nicht rechtfertigen.

4. Kurze Beschreibung weiterer Verfahren

a) Beispiel eines farbigen Kombinationsverfahrens mit doppelbrechendem Phasenstreifen

Ein schneller Wechsel zwischen Hellfeld- und Phasenkontrastbild⁴⁾ kann durch Drehen eines Polarisators auch dann vorgenommen werden, wenn der Phasenstreifen aus einer $\lambda/4$ -Platte doppelbrechendes Materials ausgeführt und so eingebettet wird, daß es sich von dem umgebenden Material für die eine Polarisationsrichtung nicht im Brechungsindex unterscheidet. Für die andere Hauptpolarisationsrichtung ist dann der Phasenstreifen ein $\lambda/4$ -Streifen im Sinne des Phasenkontrastverfahrens.

Eine farbige Kombination beider Verfahren erhält man auch in diesem Falle durch Einbringen einer 4-mm-Quarzplatte und eines Analysators in den Mikroskopertubus. Der Polarisator a^* selbst ist nur dann erforderlich, wenn zugleich Polarisationsobjekte erfaßt werden sollen. Dann hat es sich allerdings als noch zweckmäßiger erwiesen, den Polarisationsdetektor (Quarzplatte + Polarisator) zwischen Lichtquelle und Kondensor zu setzen. Die Beleuchtung kann hier durch die übliche Ringblende des Phasenkontrastkondensors geschehen. Die Farbtafel I, b zeigt eine nach diesem Verfahren hergestellte Aufnahme. Da es Schwierigkeiten machte, einen guten Phasenstreifen aus Glimmer anzufertigen, kann die Leistungsfähigkeit des Verfahrens gegenüber der vom Verfasser erreichten wohl noch wesentlich gesteigert werden.

b) Kombinationsverfahren mit einem Phasenstreifen dispergierenden Materials

Wie Verfasser kürzlich erfuhr, hat Zernike⁷⁾ schon 1948 vor den entsprechenden Arbeiten des Verfassers eine farbige Kombination zwischen Hellfeld- und Phasen-

*) Der Druck gibt sie fast schwarz wieder, da der Helligkeitsumfang eines Aufsichtsbildes dem eines Diapositivs nicht gewachsen ist.

⁷⁾ Saylor, Brice u. Zernike, J. Opt. Soc. Amer. **40**, 329 (1950). Dasselbe Verfahren wurde unabhängig im Dezember 1948 (unveröffentlicht) auch in den Optischen Werken Ernst Leitz, Wetzlar entdeckt.

kontrastbild dadurch geschaffen, daß er einen Phasenstreifen benutzte, der durch seine Dispersion und zugleich infolge der Wellenlängenänderung für einen Teil des Spektrums einen $\lambda/4$ -Phasenstreifen darstellt, während er für einen anderen Teil des Spektrums keine Phasenverschiebung bewirkt und hier also die Hellfeldbeobachtung zuläßt.

Fügt man in ein so ausgerüstetes Mikroskop über die Vorrichtung Zernikes hinausgehend einen Analysator, einen Polarisator und die oben genannte Quarzplatte ein, so ist unsere in Abschnitt 1 gestellte Aufgabe auch auf diesem Wege annähernd erreichbar. Allerdings wirken die Polarisationsfarben hier nur nach Art veränderlicher Farbfilter in einem farbigen Phasenkontrast-Hellfeldbild, dessen Farben an sich nicht verändert werden; dadurch bleiben relativ viele Objekt-kombinationen unsichtbar. Eine zusammenfassende Kritik der verschiedenen Verfahren folgt in Abschnitt 5.

c) Kombinationsverfahren mit Farbringern in der Kondensorbrennebene

Dem unter b beschriebenen ähnelt in der Wirkung ein zuerst von Grigg⁸⁾ veröffentlichtes Verfahren, das in einem Phasenkontrastmikroskop mit handelsüblichem Phasenring als Kondensordiaphragma eine Farbenplatte benutzt. In der Anordnung des Verfassers ist die Kondensorringblende durch eine Glasplatte ersetzt, die an der Stelle des sonst durchsichtigen Ringes rote Eosin gelatine und an den sonst undurchsichtigen Stellen grüne Naphtholgrün gelatine trägt. Licht, das von dem roten Ringgebiet ausgeht, liefert wie im gewöhnlichen Phasenkontrastmikroskop ein Phasenkontrastbild in roter Farbe. Das von dem grün gefärbten Teile ausgehende Licht liefert im wesentlichen ein grünes Hellfeldbild. Um in dem Überlagerungsbilde nicht allzusehr das Hellfeldbild dominieren zu lassen⁹⁾, färbte Verfasser nur die unmittelbare Umgebung des roten Ringes grün und beließ weiter entfernte Gebiete undurchlässig. Damit erreicht man zugleich, daß die grünen Lichtanteile nicht ein reines Hellfeldbild, sondern großenteils negativen Phasenkontrast erzeugen; das führt zu einer Erhöhung des Farbenkontrastes.

Die Vervollständigung zum Polarisationsmikroskop wird zweckmäßig durch Einbau eines gewöhnlichen Polarisators, eines Analysators und einer Quarzplatte erreicht. Das resultierende Verfahren hat ähnliche Nachteile wie das unter b beschriebene, da auch hier die Polarisationsfarben nur als Filter in einem farbigen Bilde wirken. Die nach diesem Verfahren hergestellten Aufnahmen wurden auf der Nauheimer Tagung gezeigt und a. a. O. näher beschrieben¹⁰⁾; sie erreichen nicht völlig die Deutlichkeit der Abbildungen Ia und Ib.

5. Kritik der Verfahren

Mit jedem der beschriebenen Verfahren können zwar Amplituden-, Phasen- und Polarisationsobjekte gleichzeitig sichtbar gemacht werden. Doch geben erstens nur die beiden in den Abschnitten 3 und 4a beschriebenen Verfahren Normalfarben, die sich zu einer quantitativen Auswertung gut eignen¹¹⁾. Zweitens ist keines der

⁸⁾ F. G. Grigg, Nature 165, 368–369 (1950).

⁹⁾ Grigg schwächte statt dessen den Hellfeldteil durch Polarisatoren, die von ihm nicht zur Farbgebung selbst ausgenutzt wurden.

¹⁰⁾ H. Wolter, Naturwiss. 37, 491 (1950).

¹¹⁾ Ann. Physik (6) 8, 11 (1950).

Verfahren die vollständige Lösung der im ersten Abschnitt gestellten Aufgabe. Denn die Kennzeichnung ist keine durchweg dreidimensionale im dort beschriebenen Sinne, und die Zuordnung zwischen Phase, Amplitude und Polarisationsrichtung einerseits und der Helligkeit, dem Farbton und der Farbsättigung andererseits sind nicht immer eindeutig, wie Verfasser es anstrebt. Die Veröffentlichung in diesem Stadium erschien aber sinnvoll, da das Erreichte dem Praktiker bereits die wichtigsten Wünsche erfüllt und einer Vervollständigung erhebliche Schwierigkeiten entgegenstehen. Diese beruhen vor allem in der grundsätzlich nicht eindeutigen Zuordnung zwischen Phase und Bildkontrast im Phasenkontrastverfahren selbst, wie das a. a. O.¹²⁾ ausführlich auseinandersetzt wurde.

Anhang

a) Die oben aufgeführten Verfahren sind nur charakteristische Beispiele; sie lassen sich noch in mannigfacher Weise abwandeln. Hier mag noch beiläufig ein weiteres Verfahren erwähnt werden, obwohl es für die oben formulierte Aufgabe nicht mehr leistet als die bereits beschriebenen. Seine Besonderheit liegt darin, daß es sich auch zur deutlichen Abbildung von Schlieren zugleich mit den oben diskutierten Objekten eignet. Wir verstehen unter Schlieren dabei nicht Phasenobjekte schlechthin, sondern Objektstellen, die das Licht von dem Wege, den wir als den regelrechten ansehen, ablecken. Sie werden wegen der dabei auftretenden meist zu großen Phasenverschiebungen von dem einfachen Phasenkontrastverfahren (und auch von den oben beschriebenen Farbverfahren) nicht deutlich wiedergegeben.

Der Leser denke sich in ein gewöhnliches Phasenkontrastmikroskop mit geradem Phasenstreifen und spaltförmigem Lichtquellendiaphragma ein schwach dispergierendes kleines Geradsichtprisma gelegt, und zwar vorzugsweise zwischen Kondensor und Objektiv. Das Prisma ändert an dem Strahlengang nur wenig, wandelt aber das Bild des Lichtquellenspaltes in ein Spektrum um, von dem nur ein Teil auf den Phasenstreifen fällt. Für diesen Teil des Spektrums wird dann das Phasenkontrastverfahren wirksam, für den Rest des Spektrums wird im wesentlichen das Hellfeld realisiert. Das hat dieselben Gründe und auch annähernd dieselbe Wirkung wie bei dem Verfahren nach Abschnitt 4c, bei dem ein farbiges Lichtquellendiaphragma benutzt wurde. Aber dieses Prismenverfahren ist zugleich ein Farbschlierenverfahren¹³⁾, da seitlich ablenkende Objektteile einen anderen Teil des Spektrums auf den Phasenstreifen lenken als nicht ablenkende. Die Abbildungen Tafel Ic und d zeigen in dieser Weise aufgenommene Schlieren in zwei Glasplatten, und zwar sogenannte Längsschlieren bzw. eine Körnerschlieren. Die Glasoberfläche des letzten Objekts zeigt vom Schleifen her außerdem leichte Unregelmäßigkeiten mittels der Phasenkontrastwirkung*).

Das Verfahren verbindet die Empfindlichkeit des Phasenkontrastverfahrens mit dem großen Beobachtungsbereich des Farbschlierenverfahrens.

Das Geradsichtprisma kann meistens sogar eingespart werden, wenn der Kondensor ein wenig verkantet wird und dann selbst bereits Farbfehler der gewünschten Art gibt. Der Fall lag bei den Aufnahmen vor. Ebenso wie man gewöhnlich bei dem Phasenkontrastverfahren selbst den Phasenstreifen ein wenig

¹²⁾ Ann. Physik (6) 7, 33 (1949).

¹³⁾ Man beachte hierzu das Prismenschlierenverfahren von H. Schardin, Ergebnisse der exakten Naturwissenschaften, XX, 303 (1942).

*) Ann. bei Korrektur: Der Druckraster gestattete nicht die Wiedergabe dieser Feinheiten.

absorbierend ausführt, erweist es sich bei den farbigen Phasenkontrastverfahren und auch bei dem soeben beschriebenen Farbschlierenverfahren als nützlich, den Phasenstreifen etwas anzufärben. Bei den Aufnahmen Ic und d war er mit Eosin rötlich gefärbt worden.

b) Flimmermikroskopie. Ohne farbige Kombination eines Phasenkontrastbildes und eines Hellfeldbildes kann man Amplituden- und Phasenobjekte praktisch gleichzeitig sichtbar machen, wenn man beide Bilder schnell — d. h. etwa 3- bis 8 mal pro Sekunde — wechselt. Beide Objektarten werden dann durch ein Flimmen erkennbar, während von Objekten freie Stellen nicht flimmen. Geeignet hierzu sind alle Verfahren, bei denen z. B. durch Drehen eines Polarisators das Phasenkontrastbild gegen das Hellfeldbild vertauscht wird (siehe Abschnitt 3 und 4a). Zweckmäßig läßt man jedoch zur Abkürzung der Zeiten, die schlechte Bilder zeigen, nicht einfach einen Polarisator rotieren, sondern eine Glasplatte, die verschiedenen polarisierende Sektoren aus Käsemannscher Folie trägt.

c) Der Mikroskopiker, der vorläufig nicht über eine der oben beschriebenen Vorrichtungen verfügt, kann mit einem einfach selbst zubauenden Zusatz zum Phasenkontrastmikroskop den schnellen Wechsel zwischen Hellfeldbild und Phasenkontrastbild bewirken.

Der Objektträger werde durch zwei auf den Objekttisch geklebte Blech- oder Pappstreifen von etwa 1 mm Dicke so gehoben, daß zwischen ihm und dem Objekttisch noch ein dünner Objektträger (wir nennen ihn die Zusatzplatte) bewegt werden kann. Auf diesen Objektträger klebt man ein winziges Deckglasstückchen mit Caedax oder Canadabalsam usw. etwas schräg auf, so daß aus dem zur Zusatzplatte erwählten Objektträger an dieser Stelle ein kleines Prisma wird. Das Phasenkontrastmikroskop justiert man, während das Prisma der Zusatzplatte nicht im Gesichtsfeld liegt. Bewegt man dann bei der gewöhnlichen mikroskopischen Beobachtung die Zusatzplatte, so erscheint jeweils die Objektstelle, unter der sich das Prisma befindet, im Hellfeldbild, der Rest im Phasenkontrastbild.

Selbstverständlich muß die Umgebung des Prismas sorgfältig von Canadabalsam gereinigt sein. Die Neigung des Prismas wird zweckmäßig ausprobiert. Je stärkere Vergrößerungen man anzuwenden pflegt, desto kleiner führt man das Prisma aus und desto näher sollte es dem Objekt liegen.

Die Zusatzplatte kann mit Vorteil auch aus einem großen Deckglas gefertigt werden, das passend zu haltern ist.

Es hat sich auch bewährt, die Zusatzplatte klein auszuführen und am Kondensor zu befestigen. Das Prisma liegt dann fest im Gesichtsfeld und das Objekt wird wie üblich mit dem Kreuztisch bewegt. Diese Form der Vorrichtung erfordert weniger manuelle Geschicklichkeit als die oben beschriebene, bei der man sich schon nach kurzem Gebrauch eine Feinbewegung der Zusatzplatte wünscht.

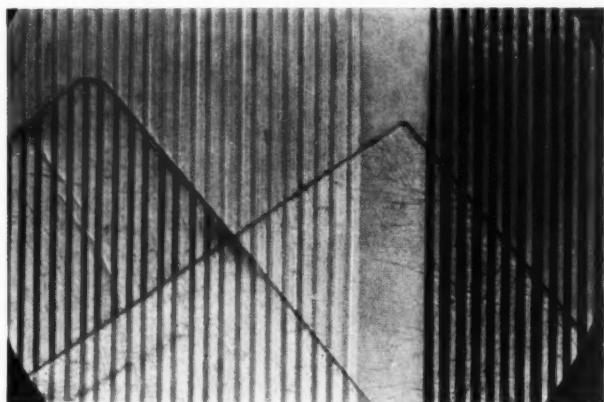
Auch dieses Verfahren läßt sich zur Flimmermikroskopie ausbauen.

Dem Direktor des Instituts, Herrn Professor Dr. Lochte-Holtgreven, dankt Verfasser für die großzügige Überlassung von Räumen und Geräten und Herrn stud. phil. Knutzen für seine unermüdliche Hilfe bei der experimentellen Arbeit.

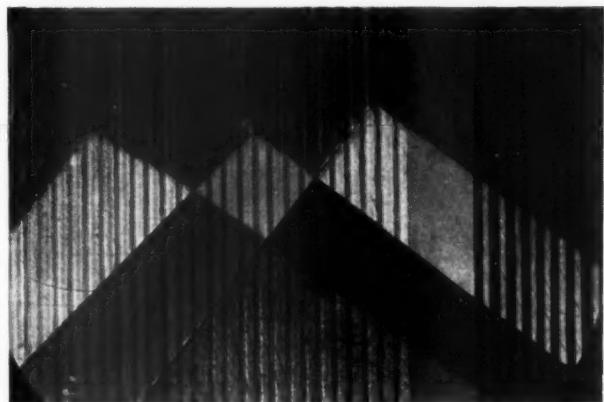
Kiel, Institut für Experimentalphysik der Universität.

(Bei der Redaktion eingegangen am 27. Dezember 1950.)

H. Wolter: „Zur Abbildung von Amplituden-, Phasen- und Polarisationsobjekten in einem einzigen farbigen Bilde“

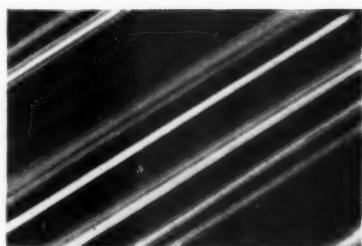


a

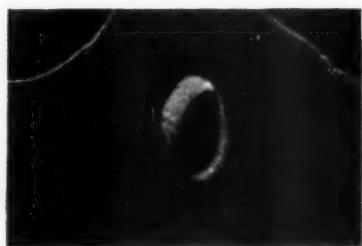


b

Farbige Phasenkontrastaufnahmen eines Objekts, das rechts ein Amplitudengitter, links ein Phasengitter und unten Polarisationsobjekte (Glimmerplatten) enthält.
a nach dem Verfahren des Textabschnittes 3; b nach Textabschnitt 4a



c



d

c und d sind Farbschlieren-Phasenkontrastaufnahmen nach dem Verfahren des Anhangs, Teil a

Bemerkung: Diese farbigen Drucke ähneln den Originalen am meisten, wenn sie besonders hell beleuchtet werden. Im zerstreuten Licht wirken die Farben zu dunkel und zu grau.

das
wer
Ohr
ord
Glü
obj
obj
wer
tre
des

zur
Pha
im

das
som
Zuc
Abs
sofe
und
so
kor
vor
geg
ord
Pha
wer
Lie

Ver
Lor

Interferenzgerät zur Umwandlung eines Mikroskops in ein Interferenzmikroskop

Von Hans Wolter

(Mit 1 Abbildung)

Inhaltsübersicht

Es wird ein einfach zu fertigendes und lichtstarkes Interferenzgerät beschrieben, das in ein Mikroskop oder eine makroskopische Abbildungsvorrichtung eingesetzt werden kann und u. a. Phasenobjekte deutlich erkennen und vermessen läßt. Ohne Justierschwierigkeiten liefert das Gerät automatisch niedere Interferenzordnungen, so daß spektral beliebig zusammengesetzte Beleuchtung, z. B. auch Glühlicht oder Elektronenblitzlicht verwendbar ist. Zugleich mit den Phasenobjekten werden ohne weiteres auch Amplitudenobjekte deutlich; Polarisationsobjekte können durch Einfügen von Polarisatoren ebenfalls sichtbar gemacht werden. Ein mit diesem Interferenzgerät ausgerüstetes Mikroskop gibt objekt-treue farbige Bilder und ist frei von den „Höfen“ und „Aufhellungerscheinungen“ des Phasenkontrastverfahrens.

1. Das hier zu beschreibende Interferenzgerät dient zur Verdeutlichung und zur Vermessung von Bildern makroskopischer oder vorzugsweise mikroskopischer Phasenobjekte, d. h. solcher Gegenstände, die sich von ihrer Umgebung vorwiegend im Brechungsindex unterscheiden.

Dem dienen auch das bekannte Phasenkontrastverfahren nach Zernike, das Reflexionsinterferometer nach Fizeau-Tolansky-Merton¹⁾, das Michelsonsche und das Dysonsche²⁾ Interferometer. Das erste gibt keine eindeutige Zuordnung zwischen Phasen und Bildkontrast³⁾. Das zweite erfordert geringen Abstand zwischen dem versilberten Objektträger und dem versilberten Deckglas, sofern spektral beliebig zusammengesetztes Licht zur Beleuchtung benutzt wird, und läßt daher nur die Unterbringung extrem dünner Objekte zu. Das Michelsonsche Interferometer bedingt bei seinem Ausbau zum Interferenzmikroskop komplizierte Anordnung und Justierung, insbesondere dann, wenn die besonders vorteilhaften niederen Interferenzordnungen eingestellt werden sollen. Demgegenüber ergibt das neue Interferenzgerät automatisch niedere Interferenzordnungen, es ist leicht justierbar, frei von den prinzipiellen Mängeln des Phasenkontrastverfahrens und kann leicht mit jedem Mikroskop kombiniert werden. Gegenüber dem Dysonschen Interferometer hat es den Vorteil größerer Lichtstärke und Einfachheit.

Andererseits hat das neue Interferenzgerät auch wesentliche Nachteile im Vergleich zu einigen der anderen genannten Geräte. Es erreicht hinsichtlich

¹⁾ Tolansky, Proc. Roy. Soc. London **186**, 270 (1946); Merton, Proc. Roy. Soc. London **189**, 310 (1947).

²⁾ Dyson, Nature **164**, 229 (1949).

³⁾ H. Wolter, Ann. Physik (6) **7**, 34 u. 147 (1950); Naturwiss. **37**, 272 (1950).

Einfachheit und mühloser Justierung nicht das Phasenkontrastmikroskop. Dem Tolansky-Mertonschen Gerät mit stark verspiegelten Objektträgern und Deckgläsern ist es bei Bakterienuntersuchungen an Empfindlichkeit und auch an Einfachheit unterlegen. Sein Anwendungsbereich deckt sich daher nicht mit dem der anderen Geräte, und man wird es hauptsächlich dort verwenden, wo es auf Lichtstärke, Objekttreue oder gar quantitative Untersuchungen an Phasenobjekten (auch solchen von insgesamt mehreren Wellenlängen mechanischer Dicke) ankommt.

Die vorliegende Veröffentlichung beschränkt sich auf eine knappe Mitteilung des Prinzips und einiger Eigenschaften des Interferometers. Die entscheidende Frage nach der objektreuen Abbildung wird an Hand farbiger Aufnahmen im Rahmen allgemeiner Untersuchungen zur Interferenzmikroskopie später diskutiert werden; denn diese Frage läßt sich für eine große Klasse von Interferenzgeräten einheitlich behandeln und beantworten.

2. Im Prinzip kann man das Interferenzgerät auf das Jaminsche Interferometer zurückführen, das bekanntlich niedrige Ordnungen nur dann gibt, wenn beide Planparallelplatten sehr genau gleiche Dicke haben. Diese sonst unbequeme Forderung erfüllt man mit dem neuen Interferometer mühlos, indem man es als Jaminsches Interferometer aufbaut, dessen zweite Planparallelplatte nicht real ausgeführt, sondern lediglich ein Spiegelbild der ersten ist; denn keine zwei Planparallelplatten könnten einander so gleichen wie eine Platte ihrem Spiegelbild.

Dieses Prinzip kann man auf mehrfache Weise auswerten. Hier sei als Ausführungsbeispiel die Form beschrieben, in der das Gerät zum Ausbau eines Mikroskops zum Interferenzmikroskop dient. Die makroskopische Ausführungsform kann hieraus durch Vereinfachung leicht erschlossen werden.

Als Zusatz zum Mikroskop wird das Interferenzgerät zwischen Kondensor und Objektiv gesetzt; es besteht aus zwei einander parallelen, undurchlässigen, ebenen und gemäß der Abb. 1 unterbrochenen Spiegeln *a* und *b* und einer zu beiden Spiegeln parallelen teildurchlässigen und entsprechend der Abb. 1 unterbrochenen Spiegelfläche *c*.

Beleuchtet wird mit einem Lichtkegel, der z. B. dadurch hergestellt werden kann, daß in die untere Brennebene des Mikroskopkondensors eine Ringblende gelegt wird. *e* sei ein einfallender Strahl des Lichtkegels. Der Teil *f* dieses Strahles wird an der halbdurchlässig verspiegelten Fläche *c* reflektiert, dann an *a* reflektiert, ferner an *b* und schließlich an *c* reflektiert; er verläßt bei *k* das Gerät und tritt dort in das Mikroskopobjektiv ein, sofern nicht eine weitere Reflexion an dem in der Umgebung der optischen Achse *u* ausgesparten Kugelspiegel *x* und nochmals an dem Spiegel *b* vorgezogen wird. Der andere Teil *l* des einfallenden Strahles *e* wird an *b*, dann an *a* reflektiert und durchsetzt die zur Aufnahme des Objekts bestimmte Objektkammer *t*, dann den Spiegel *c* und vereinigt sich mit dem Strahle *k*. Beide Strahlenwege haben gleiche optische Länge, wenn die Objektkammer ein Medium enthält, dessen Brechungsindex völlig dem der Kompensationskammer *t'* gleicht. Liegen jedoch in dem Medium der Objektkammer *t* mikroskopische Phasenobjekte, so tritt ein Gangunterschied auf, der sich bei Verwendung weißer Beleuchtung in Farbunterschieden oder bei Verwendung monochromatischen Lichtes in Helligkeitsunterschieden äußert. Was hier für einen Strahl ausgesagt wurde, gilt entsprechend für jeden Strahl des Beleuchtungskegels. Man denke sich zum Verständnis des gesamten Vorgangs eine räumliche Anordnung, die durch Rotation der Abb. 1 um die optische Achse *u* beschrieben werden kann.

I
in ei
sätzl
einge
obje
Falle
spieg
und
mit
unab

Abb.
lässig
Spieg
liegt

D
diese
auf
setzt

M
kann
Rau
wend
zusa
und
Eins
glas.

Die aus dem Interferenzgerät austretenden Strahlen k kann man unmittelbar in ein Mikroskopobjektiv eintreten lassen. Dann fällt der in Abb. 1 noch zusätzlich gezeichnete Kugelspiegel x fort und das Objektiv wird scharf eingestellt auf die Objektkammer t . Da manche der gebräuchlichen Mikroskopobjektive aber sehr kleine Frontlinsen haben, müßte das Interferometer in diesem Falle unbequem klein ausgeführt werden. Deshalb ist es zweckmäßig, den Kugelspiegel x , der in der Umgebung der optischen Achse u ausgespart sei, zu verwenden und durch ihn die Objektkammer bei y abzubilden. Dann wird erst dieses Bild mit dem Mikroskopobjektiv betrachtet. Hierdurch wird die Größe des Geräts unabhängig von der Größe der Frontlinse²⁾.

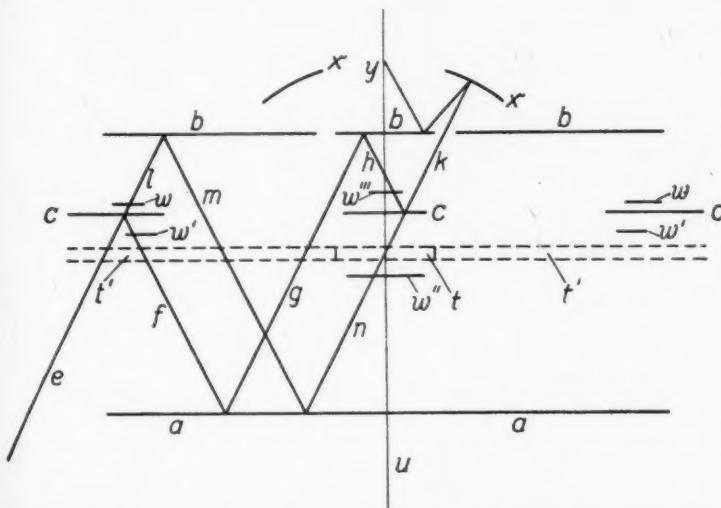


Abb. 1. Schnitt durch das Interferenzgerät. a und b sind Spiegelflächen, c halbdurchlässige Spiegelflächen. c und b bilden Belegungen auf einer Planparallelplatte; der Spiegel a lässt die Planparallelplatte ein zweites Mal wirksam werden. In der Kammer t liegt das Objekt; oberhalb y ist das Mikroskopobjektiv mit u als optischer Achse zu denken

Die Lage der Objektkammer kann noch weitgehend variiert werden. So kann diese z. B. unmittelbar an der Fläche a oder b liegen, so daß dasselbe Objekt von dem auf den Spiegel a bzw. b auftreffenden und von dem reflektierten Strahl durchsetzt wird. Dadurch erreicht man die doppelte Empfindlichkeit.

Man kann auch darauf verzichten, die Objektkammer und die Kompensationskammer voneinander zu trennen. Am einfachsten werden beide als ein gemeinsamer Raum wie der üblicherweise zwischen Objektträger und Deckglas gebildete verwendet. Das gesamte Interferenzgerät kann aus zwei Teilen bestehen, die dort zusammengesetzt werden, wo sich entsprechend der Abb. 1 die Objektkammer t und die Kompensationskammer t' befinden. Beide Teile werden dann unter Einschluß des Objekts so aufeinandergelegt wie ein Objektträger und ein Deckglas. Eine leichte seitliche Verschiebung des oberen Teiles gegen den unteren Teil

ist ohne Belang. Die Parallelität der Flächen *a*, *b*, *c* kann durch eine Justierzrichtung stets optimal eingestellt werden. Doch ist das Interferenzgerät gegen ein leichtes Abweichen von der Parallelität der Flächen nicht besonders empfindlich.

3. Das Interferenzgerät erlaubt die Herstellung niederer Interferenzordnungen auch bei Verwendung einer dicken Objektkammer. Darin liegt der entscheidende Vorteil gegenüber der Tolanskyschen Anordnung, in der dicke Objekte nur mit hohen Interferenzordnungen beobachtet werden konnten.

Die Verwendung niederer Interferenzordnungen bietet mehrere Vorteile:

a) Die Verwendbarkeit beliebig spektral zusammengesetzten Lichtes sorgt für kurze Belichtungszeiten bei der Mikrophotographie; auch Elektronenblitzlampen können benutzt werden.

b) Bei Verwendung weißen Lichtes kann man z. B. den Gangunterschied so wählen, daß das Gesichtsfeld die Farbe Purpur annimmt. Die Objekte erscheinen dann farbig differenziert, weiße Blutkörperchen z. B. grün mit blauem Kern. Bakterien sind deutlich farbig abgesetzt von der Umgebung. Um feine Bakterien nachzuweisen, stellt man zweckmäßig den Gangunterschied auf fast dunkles Gesichtsfeld ein, auf dem Bakterien sich dann hell abheben.

Auch die Vermessung der optischen Dicke von Phasenobjekten ist bei Verwendung kontinuierlicher Beleuchtung erheblich erleichtert; man stellt hierbei den Gangunterschied für das gesamte Gesichtsfeld ungleichmäßig ein, so daß der von Objekten freie Gesichtsfeldteil bereits von Interferenzstreifen durchzogen wird. Die Verschiebung, die diese Streifen innerhalb der Objekte erfahren, kann bei Verwendung von Glühlicht und niedrigen Interferenzordnungen in eindeutiger Weise gemessen werden, während bei der Verwendung hoher Ordnungen und monochromatischen Lichtes bekanntlich eine Unbestimmtheit bleibt.

c) Die Benutzung weißen Lichtes läßt eine Kombination mit der Polarisationsmikroskopie zu; die Vorrichtung ist dann zwischen Kondensor und Objektiv eines Polarisationsmikroskops zu setzen, das die Polarisationsunterschiede zweckmäßig durch eine in den Strahlengang gebrachte Quarzplatte oder Glimmerplatte in bekannter Weise zu Farbunterschieden umwandelt. Die Depolarisation an den Spiegelflächen erschwert zwar quantitative Auswertung; doch erlaubt ein so aufgebautes Mikroskop, Polarisationsobjekte und Phasenobjekte gleichzeitig sichtbar zu machen. Amplitudenobjekte sind mit dem Mikroskop ebenfalls ohne Schwierkeiten erkennbar.

4. Das Interferenzgerät kann noch in verschiedener Hinsicht abgewandelt werden. Wenn es auf die Lichtintensität nicht ankommt, wie z. B. bei der Beobachtung und Mikrophotographie unbeweglicher Objekte, so kann man die Spiegelfläche *b* in der gesamten Ausdehnung halbdurchlässig spiegelnd ausführen. Man gewinnt dadurch eine volle Ausnutzung der Objektivapertur und eine größere Freiheit in der Wahl der Beleuchtungsapertur, besonders dann, wenn man auch die Fläche *a* und u. U. auch die Fläche *c* ganz oder doch größtenteils halbdurchlässig verspiegelt.

Bei Verwendung eines Kugelspiegels *x* wird mit Vorteil unmittelbar über den Spiegel *b* noch ein nach oben erhabener Spiegel gesetzt; dieser reflektiert das von dem Kugelspiegel *x* kommende Licht statt des ebenen Spiegels *b* und entwirft unmittelbar ein Bild in dem Okular des Mikroskops, so daß ein Mikroskopobjektiv damit entbehrlich wird.

Alle mit dem Einbau von Kugelspiegeln verbundenen Abbildungsfehler vermeidet man, wenn man den Kugelspiegel *x* nur für radiale, in sich reflektierte

Strahlen verwendet. Die Fläche b ist dann außerhalb des vollspiegelnden Gebietes oder als Ganzes durchlässig verspiegelt auszuführen²⁾.

Das Interferenzgerät kann auch so abgewandelt werden, daß reflektierende Objekte im Auflicht betrachtet werden können. Das reflektierende Objekt tritt dann an die Stelle eines Teiles des Spiegels a oder b . Die Abmessungen des Interferenzgerätes sind dann so zu ändern, daß dieses Objekt annähernd in der optischen Achse liegt.

5. Ein besonders empfindliches und zu quantitativen Messungen geeignetes Gerät zur Sichtbarmachung der Phasenunterschiede erhält man, wenn man bei w einen z. B. radial polarisierenden Ring und bei w' einen z. B. tangential polarisierenden Ring anbringt. Man kann dabei die Worte „tangential“ und „radial“ miteinander vertauschen. Die Ringe können ferner auch an andere Stellen des geteilten Strahlenganges gebracht werden. Man kann den Ring w auch durch ein polarisierendes Kreisscheibchen w'' unterhalb der Objektkammer t und den Ring w' durch ein jeweils senkrecht zu w polarisierendes Kreisscheibchen w''' ersetzen. Hierdurch werden die Gangunterschiede, die das Objekt bei t verursacht, umgewandelt in Gangunterschiede zwischen zwei polarisierten Komponenten im Strahle k . Dadurch werden auf dieses Interferenzmikroskop alle vom Polarisationsmikroskop her bekannten Verfahren zum Nachweis von Gangunterschieden zweier senkrecht zueinander polarisierter Schwingungskomponenten übertragbar. Man setzt hierzu insbesondere in den Weg des Strahles e und des Strahles k je einen vorzugsweise unter 45° gegen den Radius polarisierenden Ring. Werden zwischen diese Ringe noch doppelbrechende oder Rotationsdispersion zeigende Platten oder entsprechende Ringe eingelegt, so können die Polarisationsunterschiede in Farbunterschiede umgewandelt werden, wie das an sich vom Polarisationsmikroskop her geläufig ist.

6. Man kann bei der mikroskopischen, vor allem aber bei der makroskopischen Verwendung des Interferenzgerätes auf die rotationssymmetrische Ausführung der Anordnung und der Beleuchtung verzichten, indem man nur einen Teil der zum Beleuchtungskegel gehörenden Strahlen verwendet. Insbesondere wird man bei der makroskopischen Ausführung oft mit einem einzigen Strahle e — d. h. mit einem Wellenbündel — auskommen. Auf den Kugelspiegel x wird man dann in den meisten Fällen verzichten.

Bei einem solchen Verzicht auf rotationssymmetrische Ausführung vereinfachen sich auch die Polarisatoren w und w' bzw. w'' und w''' wesentlich. Insbesondere wird man bei Verwendung nur eines Strahles e — d. h. eines Wellenbündels — diese Polarisatoren als einfache linearpolarisierende Platten ausbilden. Statt „radialpolarisierend“ denke man sich oben dann „linearpolarisierend mit Schwingungsrichtung in der Einfallsebene“ gesetzt und entsprechend „linearpolarisierend mit Schwingungsrichtung senkrecht zur Einfallsebene“ statt „tangentialpolarisieren“. Die in die Strahlen e und k zu bringenden Polarisatoren sind dann Linearpolarisatoren mit Schwingungsrichtungen, die um 45° gegen die Einfallsebene geneigt sind.

Dem Direktor des Instituts, Herrn Prof. Dr. Lochte-Holtgreven, dankt Verfasser für die freundliche Überlassung von Räumen und Geräten und Herrn stud. rer. nat. Carstensen für seine Hilfe bei experimentellen Arbeiten. Insbesondere dankt Verfasser der Firma Ernst Leitz und Herrn Dr. Rosenthal-Wetzlar für die Bereitstellung ausgezeichneter Planparallelplatten.

Kiel, Institut für Experimentalphysik der Universität.

(Bei der Redaktion eingegangen am 24. Februar 1951.)

Über die Zustandsgleichung der Alkalimetalle

Von P. Gombás

(Mit 4 Abbildungen)

Inhaltsübersicht

Die vom Verfasser in mehreren früheren Arbeiten entwickelte Theorie der Alkalimetalle, die sich auf den absoluten Nullpunkt der Temperatur bezieht und fast ausschließlich für den Druck Null Anwendung gefunden hat, wird für von Null verschiedenen Drucken und Temperaturen weiterentwickelt. Es wird die Zustandsgleichung der Alkalimetalle hergeleitet, aus der sich einige für die Alkalimetalle universell gültige Beziehungen ergeben. Empirische oder halbempirische Parameter werden nicht eingeführt.

In einigen früheren Arbeiten des Verfassers¹⁾ wurde eine Theorie der Alkalimetalle ausgearbeitet, die sich auf das statistische Modell der Metallionen gründet. Wir haben uns dort ausschließlich auf den absoluten Nullpunkt der Temperatur und fast durchweg auf den Druck Null bezogen. Es soll hier nun gezeigt werden, wie man diese Theorie auf beliebige Drucke und Temperaturen erweitern kann.

Auf Grund der oben zitierten Theorie ergibt sich die Gitterenergie U der Alkalimetalle²⁾ pro Metallatom beim absoluten Nullpunkt der Temperatur als ein Polynom vierten Grades des reziproken Gitterabstandes, das in einem beträchtlichen Bereich in der Umgebung der Gleichgewichtslage in sehr guter Näherung durch den einfachen Ausdruck

$$U = -\frac{A}{V^{1/3}} + \frac{B}{V} = -\left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/3} \frac{A}{R} + \frac{3^{1/3} B}{4\pi R^3} \quad (1)$$

dargestellt werden kann³⁾. Hier bedeutet R den Radius der ein Metallatom enthaltenden Elementarkugel, $V = 4\pi R^3/3$ das Metallvolumen pro Metallatom,

¹⁾ P. Gombás, Nature (London) **157**, 668 (1946); Hung. Acta Physica **1**, 2 Nr. (1947); Die statistische Theorie des Atoms und ihre Anwendungen, Springer, Wien, 1949, S. 299 bis 332. — Es sei hier bemerkt, daß in der vorläufigen Mitteilung des Verfassers [Phys. Rev. (2) **72**, 1123 (1947)] die Formel für die reziproke Kompressibilität unrichtig ist und durch die hier gegebene Formel (9) zu ersetzen ist; dementsprechend sind dort in den Kompressibilitäts-Druck-Diagrammen für die Alkali- und Erdalkalimetalle die Ordinaten durch $1 + \frac{2}{3} \times P$ zu dividieren, wo α die Kompressibilität und P den Druck bezeichnet.

²⁾ Das metallische Li ist aus den Betrachtungen auszuschließen, da das Li^+ -Ion nur 2 Elektronen enthält, das eine statistische Behandlungsweise unmöglich macht.

³⁾ In der vorläufigen Mitteilung wurde der vollständige Ausdruck der Gitterenergie (Polynom vierten Grades in $1/R$) benutzt, demzufolge die in der vorläufigen Mitteilung erhaltenen Resultate von den hier erhaltenen etwas verschieden sind.

weiterhin A und B die Konstanten

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{3}{2} \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{1/3} e^2, \\ B &= \frac{1}{3} A V_0^{1/3} = \frac{1}{2} \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{1/3} e^2 V_0^{1/3} = \frac{2\pi}{3} e^2 R_0^2. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

e ist die positive Elementarladung, V_0 der Wert von V in der Gleichgewichtslage, d. h. für das Minimum von U und R_0 der Wert von R an derselben Stelle.

Mit dem Ausdruck (1) der Gitterenergie ergibt sich alles weitere sehr einfach. So erhält man z. B. beim absoluten Nullpunkt der Temperatur in der Gleichgewichtslage für die Gitterenergie U_0 und die Kompressibilität κ_0

$$U_0 = - \frac{2}{3} \frac{A}{V_0^{1/3}} = - \frac{e^2}{R_0}, \quad (3)$$

$$\kappa_0 = \frac{9}{2A} V_0^{1/3} = \frac{4\pi}{e^2} R_0^4. \quad (4)$$

U_0 und κ_0 wurden hieraus mit den empirischen Werten von V_0 bzw. R_0 berechnet; die Resultate sind in der Tabelle 1 angegeben. Zum Vergleich sind in der Tabelle auch die empirischen Werte für U_0 und κ_0 angeführt; und zwar wurde für die empirischen Werte der Gitterenergie die Summe der Ionisierungsenergie des freien Alkaliatoms und die Sublimationsenergie des Alkalimetalls gesetzt; die empirischen Werte der Kompressibilität am absoluten Nullpunkt der Temperatur sind die von Bardeen⁴⁾ aus den Meßergebnissen von Bridgman⁵⁾ auf den absoluten Nullpunkt der Temperatur extrapolierten Kompressibilitäten.

Aus den Relationen (3) und (4) erhält man durch Elimination von A die sogenannte erste Grüneisensche Beziehung

$$U_0 \kappa_0 = -3 V_0. \quad (5)$$

Zur Prüfung dieses Zusammenhangs haben wir mit den in der Tabelle 1 angegebenen empirischen Werten von U_0 , κ_0 und V_0 das Verhältnis $-U_0 \kappa_0 / V_0$ berechnet, das nach (5) mit der dimensionslosen Zahl 3 gleich sein soll. Wie aus den in der Tabelle 1 angegebenen Werten dieses Verhältnisses zu sehen ist, wird der Zusammenhang (5) durch den experimentellen Befund sehr gut bestätigt.

Tabelle 1

	Na	K	Rb	Cs
R_0 in 10^{-8} cm Einheiten, emp.	2,09	2,58	2,77	2,98
V_0 in 10^{-24} cm ³ Einheiten, emp.	38,24	71,94	89,03	110,85
$-U_0$ in 10^{-13} erg Einheiten, (theor.) emp.	110,4	89,31	83,19	77,42
κ_0 in 10^{-12} cm ² /dyn Einheiten, (theor.) emp.	102,9	87,50	83,89	78,81
$-U_0 \kappa_0 / V_0$	10,4	24,2	32,2	42,9
γ	12,3	23,9	31,9	42,8
	3,31	2,91	3,01	3,04
	1,58	1,53	1,48	1,48

⁴⁾ J. Bardeen, J. chem. Physics **6**, 372 (1938).

⁵⁾ P. W. Bridgman, Proc. Amer. Acad. **72**, 207 (1938).

Unser weiteres Ziel ist zunächst am absoluten Nullpunkt der Temperatur die Zustandsgleichung der Alkalimetalle herzuleiten und aus dieser das Metallvolumen und die Kompressibilität als Funktion des Druckes sowie die Kompressibilität als Funktion des Volumens darzustellen. Hierbei gelangt man zu einfachen analytischen Ausdrücken und zu einigen universellen Beziehungen, die mit den aus dem vollständigen Ausdruck⁴⁾ der Gitterenergie hergeleiteten und analytisch nicht darstellbaren Resultaten praktisch übereinstimmen. Demfolgend wollen wir die Grüneisen'sche Konstante berechnen und kurz zeigen, wie man zur Zustandsgleichung für beliebige Temperaturen gelangt.

Aus der Definitionsgleichung des Druckes P am absoluten Nullpunkt der Temperatur, $dU = -PdV$, folgt sofort für den absoluten Nullpunkt die Beziehung

$$P = \frac{A}{3} \frac{V_0^{1/3} - V^{1/3}}{V^2}. \quad (6)$$

Dies ist die Zustandsgleichung der Alkalimetalle am absoluten Nullpunkt der Temperatur. Mit der Bezeichnung $q = V/V_0$ und mit Rücksicht auf (4) läßt sich diese Gleichung auch folgendermaßen schreiben

$$\chi_0 P = \frac{3}{2} \frac{1 - q^{1/3}}{q^2}. \quad (7)$$

Dieser Zusammenhang besagt, daß das Produkt des Druckes und der Kompressibilität am absoluten Nullpunkt der Temperatur eine nur vom relativen Volumen q abhängige Größe ist, d. h. daß $\chi_0 P$ als Funktion von q für die einzelnen Alkalimetalle denselben Verlauf zeigt.

Durch Umkehrung von (7) erhält man für das relative Volumen als Funktion von $z = \frac{9}{2A} V_0^{1/3} P = \chi_0 P$ den für die Alkalimetalle ebenfalls universell gültigen, d. h. vom einzelnen Alkalimetall unabhängigen Zusammenhang

$$q = \frac{V}{V_0} = \left(\frac{3}{4z} \right)^{1/3} \left\{ \left[1 + \left(1 + \frac{2}{9z} \right)^{1/3} \right]^{1/3} + \left[1 - \left(1 + \frac{2}{9z} \right)^{1/3} \right]^{1/3} \right\} \equiv f(z). \quad (8)$$

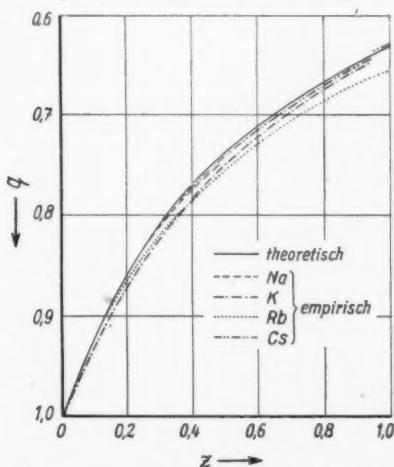


Abb. 1. Das relative Volumen q als Funktion von z .

In Abb. 1 ist dieser Zusammenhang graphisch dargestellt. Zum Vergleich sind in der Abbildung auch die empirischen Resultate von Bridgman⁵⁾ eingezeichnet, die von Bardeen⁴⁾ auf den absoluten Nullpunkt der Temperatur umgerechnet wurden; für χ_0 haben wir die in der Tabelle 1 angegebenen empirischen Werte benutzt. Die in Abb. 1 dargestellten Resultate sind sehr befriedigend, es ist nämlich zu sehen, daß erstens die empirischen Kurven nur eine geringe Streuung besitzen und zweitens, daß die empirischen Kurven in unmittelbarer Nähe der theoretischen liegen. Die Unstetigkeit der empirischen Kurve für Cs in der Nähe von

⁴⁾ Der, wie schon erwähnt wurde, ein Polynom vierten Grades von $1/R$ ist.

$z = \kappa_0 P \cong 0,95$ ist durch eine Umwandlung in der Kristallstruktur verursacht.

Zur Bestimmung der Volumen- und Druckabhängigkeit der Kompressibilität κ am absoluten Nullpunkt der Temperatur gehen wir von der Definitionsgleichung der Kompressibilität

$$\frac{1}{\kappa} = -V \frac{dP}{dV} = V \frac{d^2U}{dV^2} \quad (9)$$

aus, woraus sich mit Hilfe von (6) bzw. (1) und (8) die folgenden Zusammenhänge ergeben

$$\begin{aligned} \kappa &= \kappa_0 \frac{q^2}{3 - 2q^2} = \kappa_0 \frac{f^2(z)}{3 - 2f^2(z)} \\ &= \kappa_0 \frac{f^2(\kappa_0 P)}{3 - 2f^2(\kappa_0 P)}. \end{aligned} \quad (10)$$

Für nicht allzu große Drücke ($P \lesssim 5000 \text{ kg/cm}^2$), d. h. kleine Volumenänderungen erhält man aus (10) mit Hilfe von (7) durch eine einfache Umformung und Vernachlässigung von Gliedern, die von zweiter und höherer Ordnung klein sind,

$$\kappa = \frac{\kappa_0}{1 + \frac{10}{3}z} = \frac{\kappa_0}{1 + \frac{10}{3}\kappa_0 P}. \quad (11)$$

Aus (10) und (11) ist zu sehen, daß sich die relative Kompressibilität κ/κ_0 für die Alkalimetalle als Funktion des relativen Volumens q bzw. als Funktion von z ebenfalls durch eine universelle, d. h. v. einzelnen Alkalimetall unabhängige Funktion darstellen läßt. Den nach (10) berechneten Verlauf der relativen Kompressibilität als Funktion von z zeigt Abb. 2. Da $z = \kappa_0 P$ ist, kann man natürlich den ganz rechts stehenden Ausdruck in (10) auch als eine Funktion des Druckes P auffassen. Demzufolge, daß κ_0 für die einzelnen Alkalimetalle verschiedene Werte hat, ergibt sich, daß die Kompressibilität als Funktion von P für die einzelnen Alkalimetalle verschieden verläuft, weiterhin zeigt sich, daß κ mit wachsendem Druck um so rascher fällt, je größer κ_0 ist; die nach (10) berechneten Kompressibilitäten als Funktion von P sind für die einzelnen Alkalimetalle in Abb. 3 veranschaulicht.

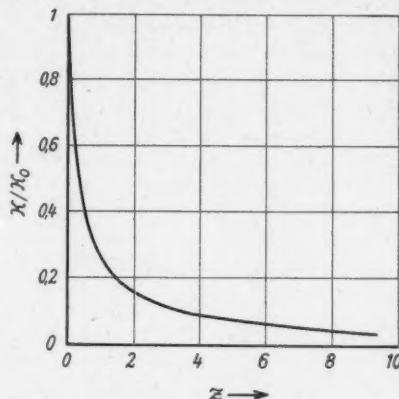


Abb. 2. Die relative Kompressibilität κ/κ_0 als Funktion von z

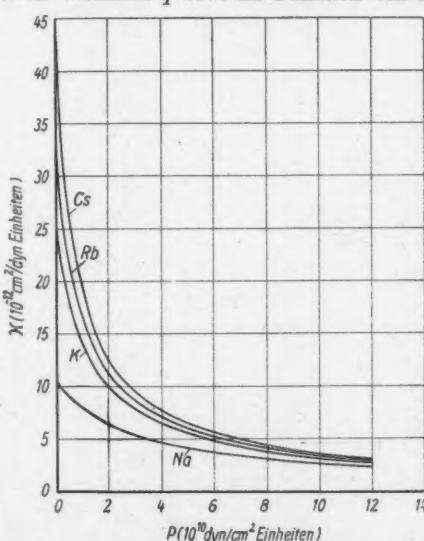


Abb. 3. Die Druck-Kompressibilität Beziehung für die Metalle Na, K, Rb und Cs

Für den Druckkoeffizienten der Kompressibilität erhält man aus (11)

$$\frac{1}{x_0} \frac{\partial x}{\partial P} = -\frac{10}{3} \frac{x_0}{(1 + \frac{10}{3} x_0 P)^2}. \quad (12)$$

Dieser Ausdruck hat nur für nicht zu große Werte des Druckes ($P \lesssim 5000 \text{ kg/cm}^2$) Gültigkeit, da er aus der Formel (11) hergeleitet wurde, für die dieselbe Einschränkung gilt. Für sehr hohe Drucke hat man den Druckkoeffizienten aus (10) zu bestimmen.

Eine weitere wichtige Konstante, die man in einfacher Weise mit Hilfe des Ausdrückes der Gitterenergie bzw. der Kompressibilität berechnen kann, ist die Grüneisensche Konstante γ , für die sich nach Debye⁷⁾ folgender Ausdruck ergibt

$$\gamma = \frac{1}{2} \frac{d \ln x}{d \ln V} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \frac{V}{x} \frac{dx}{dV} - \frac{1}{6}. \quad (13)$$

Mit Hilfe von (10) folgt hieraus

$$\gamma = \frac{5 - 2 q^{1/2}}{2(3 - 2 q^{1/2})}, \quad (14)$$

woraus man für $V = V_0$, d. h. $q = 1$

$$\gamma = \frac{3}{2} \quad (15)$$

erhält. Die Grüneisensche Konstante hat also in dieser Näherung für die verschiedenen Alkalimetalle denselben Wert. Der eingangs erwähnte vollständige Ausdruck der Gitterenergie, der durch ein Polynom vierten Grades von $1/R$ dargestellt werden kann, führt für γ zu Werten⁸⁾, die nur um weniger als 5% größer sind als der hier berechnete. Die von Slater auf halbempirischem Wege bestimmten γ -Werte⁹⁾ sind in der Tabelle 1 angegeben; wie zu sehen ist, stimmen diese mit dem Wert (15) ausgezeichnet überein.

Die Betrachtungen, die wir hier für den absoluten Nullpunkt der Temperatur durchführten, kann man auch auf höhere Temperaturen ausdehnen und die Temperaturausdehnung des Gitters, sowie die Temperaturabhängigkeit der Kompressibilität bestimmen. Hierbei können wir von der Debyeschen Zustandsgleichung¹⁰⁾

$$P V + V \frac{\partial U}{\partial V} = \gamma E = 3 \gamma k T D\left(\frac{\Theta}{T}\right)$$

ausgehen, wo $E = 3 k T D\left(\frac{\Theta}{T}\right)$ die Wärmeenergie des Gitters, D die Debyesche Funktion¹⁰⁾, k die Boltzmannsche Konstante, T die absolute Temperatur und Θ die Debyesche charakteristische Temperatur bezeichnet. Bei Zugrundelegung dieser Gleichung können wir uns der Theorie von Grüneisen anschließen mit

⁷⁾ Man vgl. z. B. J. C. Slater, Introduction to Chemical Physics, International Series in Physics, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York and London, 1939, S. 239.

⁸⁾ A. Kónya, J. chem. Physics 17, 837 (1949).

⁹⁾ J. C. Slater, Introduction to Chemical Physics, International Series in Physics, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York and London, 1939, S. 454.

¹⁰⁾ Man vgl. hierzu z. B. den Artikel von E. Grüneisen in Handb. d. Phys. Bd. X, Springer, Berlin, 1926, S. 17-21.

dem wesentlichen Unterschied, daß bei uns der rein theoretisch begründete und ohne Zuhilfenahme empirischer oder halbempirischer Parameter hergeleitete Ausdruck der Gitterenergie die Grundlage der weiteren Betrachtungen bildet, während bei Grüneisen für die Gitterenergie ein halbempirischer Ausdruck angesetzt wurde. Die Resultate, die man auf diese Weise für die Temperaturausdehnung der Alkalimetalle erhält, sind sehr befriedigend; die Resultate für die Temperaturabhängigkeit der Kompressibilität können leider experimentell nicht geprüft werden, da hierzu nicht genügend Meßwerte zur Verfügung stehen.

Es sei noch bemerkt, daß man für die Erdalkalimetalle ganz ähnliche Berechnungen durchführen kann. Die Gitterenergie dieser Metalle kann man nämlich ebenfalls — allerdings nicht in so guter Näherung wie bei den Alkalimetallen — in der Form (1) darstellen¹¹⁾. Ein Unterschied besteht nur darin, daß jetzt die Konstanten A und B die folgenden Werte besitzen

$$A = 4,755 \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{1/6} e^2, \quad B = \frac{1}{3} A V_0^{1/6}.$$

Mit diesen Werten für A und B ergeben sich aus den für die Alkalimetalle hergeleiteten Formeln die entsprechenden Formeln für die Erdalkalimetalle; die Grüneisensche Konstante hat auch hier den Wert 3/2. Alle Zusammenhänge, die wir für Alkalimetalle hergeleitet haben, gelten auch für die Erdalkalimetalle in genau derselben Form wie für die Alkalimetalle¹²⁾; insbesondere sei hervorgehoben, daß dies auch für die allgemeinen Zusammenhänge (5), (7), (8), (10), (11), (12) und (14) zutrifft. Dies ist darauf zurückzuführen, daß die Form dieser Zusammenhänge ausschließlich durch die Gestalt des zugrunde liegenden Kraftgesetzes, d. h. durch die Exponenten von V im Ausdruck der Gitterenergie (1) determiniert wird und diese sind für die Erdalkalimetalle dieselben wie für die Alkalimetalle. Die in den Abb. 1 und 2 dargestellten Kurven haben also auch für die Erdalkalimetalle Gültigkeit, wobei man sich aber mit einer bedeutend kleineren Genauigkeit als bei den Alkalimetallen zufrieden geben muß, da der Ausdruck (1) der Gitterenergie — wie schon gesagt — für die Erdalkalimetalle eine weniger gute Näherung gibt als für die Alkalimetalle. Da experimentelle Resultate nur sehr mangelhaft zur Verfügung stehen, sehen wir hier von einem Vergleich mit der Erfahrung ab und bringen nur den theoretisch aus (10) be-

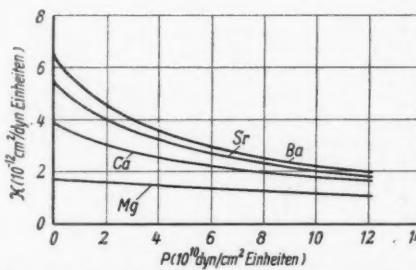


Abb. 4. Die Druck-Kompressibilität Beziehung für die Metalle Mg, Ca, Sr und Ba

¹¹⁾ Man vgl. diesbezüglich die in Fußnote 1) zitierten Arbeiten des Verfassers. Be ist auszuschließen, da das Be^{++} -Ion nur 2 Elektronen enthält, das eine statistische Behandlungsweise unmöglich macht.

¹²⁾ Eine Ausnahme bilden nur die ganz rechts stehenden Ausdrücke in (3) und (4), die sich nach Einfügen des Wertes von A ergaben; für die Erdalkalimetalle würden in diesen Ausdrücken andere Zahlenfaktoren stehen.

stimmten Verlauf der Kompressibilität der Erdalkalimetalle als Funktion des Druckes in Abb. 4. Wie aus dieser Abbildung zu sehen ist, nehmen diese Kompressibilitäten mit wachsendem Druck viel weniger ab als die Kompressibilitäten der Alkalimetalle.

Die Durchführung der vorliegenden Arbeit, sowie die aller meiner früheren Arbeiten habe ich der aufopfernden Hilfe meiner kürzlich verstorbenen Frau Ida Gombás zu verdanken.

Budapest, Physikalisches Institut der Universität für Technische Wissenschaften.

(Bei der Redaktion eingegangen am 23. Februar 1951.)

Zur Theorie der verallgemeinerten Wellengleichung

Von G. Höhler

Inhaltsübersicht

Es werden lineare Verallgemeinerungen der Wellengleichung innerhalb der klassischen Theorie untersucht. Man kann für jede verallgemeinerte Wellengleichung eine Reihe von charakteristischen Funktionen angeben. Die Arbeit enthält eine Zusammenstellung der Relationen zwischen diesen Funktionen, wobei neben den retardierten Greenschen Funktionen auch zeitsymmetrische und solche mit Überlichtgeschwindigkeiten behandelt werden. Abschließend wird diskutiert, wie die in der Literatur vorliegenden Beispiele sich in den hier gegebenen Rahmen einfügen.

1. Einleitung

Wir betrachten als verallgemeinerte Wellengleichungen lineare Integro-Differentialgleichungen, wie sie von Bopp¹⁾, Heisenberg²⁾ und anderen³⁾ diskutiert worden sind. (Bezeichnungen s. 2.)

$$\square(\varepsilon, \varphi) = -s(x). \quad (1)$$

Es sind auch Differentialgleichungen beliebiger Ordnung einbegriffen, wenn man singuläre $\varepsilon(x)$ zuläßt. Man schreibt dann auch:

$$\square \tilde{\varepsilon}(-\square) \varphi(x) = -s(x). \quad (2)$$

Gibt man ein gegenüber der eigentlichen Lorentzgruppe invariantes $\varepsilon(x)$ vor, so hat man damit eine bestimmte verallgemeinerte Theorie ausgewählt. Zur näheren Untersuchung ist es dann zweckmäßig, folgende Funktionen zu betrachten:

1. Die Greensche Funktion G . Sie ist definiert als eine Lösung von

$$\square(\varepsilon, G) = -\delta(x) \quad (3)$$

die invariant gegenüber der eigentlichen Lorentzgruppe ist.

2. Die Funktion $K(x; \omega_0)$. Sie ist definiert durch

$$\square(\varepsilon, K) = -\delta(x_1) \delta(x_2) \delta(x_3) \exp(i \omega_0 t). \quad (4)$$

Beide Funktionen erlauben, durch Überlagerung Lösungen des allgemeineren Problems (1) darzustellen, beide sind zunächst auch nur bis auf Lösungen der homogenen Gleichung bestimmt. Wir werden insbesondere die retardierte $[G^{\text{ret}}(x) \equiv 0, x_0 < 0]$ und die zeitsymmetrische Greensche Funktion

¹⁾ F. Bopp, Z. Naturforschg. 1, 53 (1946). Dort weitere Zitate.

²⁾ W. Heisenberg, Z. Naturforschg. 1, 608 (1946).

³⁾ Zuletzt von H. Lehmann, Ann. Physik 8, 109 (1950). Auf diese Arbeit sei besonders hingewiesen, da sie in ihrem ersten Teil eine ähnliche Fragestellung behandelt. Ich danke Herrn Dr. Lehmann für die Überlassung eines Skriptums vor Erscheinen der Arbeit.

[\(\bar{G}(x) \equiv \bar{G}(\sigma^2)\)] betrachten. Der Sonderfall \(\omega_0 = 0\) in (4) ist als „statisches Potential“ interessant für eine verallgemeinerte Elektrodynamik, weil er die Abweichungen vom Coulombschen Gesetz für kleine Abstände erkennen lässt.

3. Das „Massenspektrum“ \(\varrho(\kappa^2)\). Man versucht, die Lösungen des allgemeinen Problems (1) durch Überlagerung von Lösungen der Gleichung

$$(\square - \kappa^2) \varphi(x) = -s(x) \quad (5)$$

mit der Belegungsfunktion \(\varrho(\kappa^2)\) darzustellen⁴⁾. — Wegen der Linearität liegt es nahe, Integraltransformationen zu verwenden. Es werden neben den erwähnten Funktionen daher auch ihre Transformierten auftreten.

Für die gewöhnliche Wellengleichung sind die genannten Funktionen gut bekannt. Sie führen zu naheliegenden Verallgemeinerungen. Außerdem erlauben sie die einfache Formulierung von Bedingungen, denen jede Verallgemeinerung zu genügen hat.

2. Bezeichnungen

Die Lichtgeschwindigkeit ist gleich Eins gesetzt. x ist eine Abkürzung für (x_0, x_1, x_2, x_3) . $x_\mu y_\mu = x_0 y_0 + x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 - x_0 y_0$; $x_\mu^2 = -\sigma^2$; $(dx) = dx_0 dx_1 dx_2 dx_3$; $\delta(x) = \delta(x_0) \delta(x_1) \delta(x_2) \delta(x_3)$. Integrale ohne Angabe der Grenzen gehen von $-\infty$ nach $+\infty$. P bedeutet den Cauchyschen Hauptwert.

$$(\varepsilon, \varphi) = \int \varepsilon(x - x') \varphi(x') (dx'); \quad \varepsilon(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \tilde{\varepsilon}(k) e^{ik_\mu x_\mu} (dk).$$

3. Lösungen der homogenen Mesongleichung

Wir bestimmen zunächst die lorentzinvarianten und zeitsymmetrischen Lösungen der homogenen Mesongleichung. Da sie nur von der Invarianten $x_\mu^2 = -\sigma^2$ abhängen können, heißt die Gleichung:

$$(\square - \kappa^2) \varphi(\sigma^2) = -4 \left[\sigma^2 \frac{d^2}{(d\sigma^2)^2} + 2 \frac{d}{d\sigma^2} + \frac{\kappa^2}{4} \right] \varphi(\sigma^2) = 0; \quad \kappa^2 \geq 0. \quad (6)$$

Ein Fundamentalsystem lässt sich leicht angeben:

$$\frac{J_1(\sqrt{\kappa^2 \sigma^2})}{\sqrt{\kappa^2 \sigma^2}}, \quad \frac{N_1(\sqrt{\kappa^2 \sigma^2})}{\sqrt{\kappa^2 \sigma^2}}. \quad (7a, b)$$

Die erste Lösung ist für alle σ^2 reell und stetig, für große negative $\kappa^2 \sigma^2$ wächst sie exponentiell an. Die zweite wird für negative $\kappa^2 \sigma^2$ komplex und ist bei $\sigma^2 = 0$ singulär. Sie ist nicht Lösung der homogenen Gleichung im Sinn der Quellenfreiheit, wie man durch Integration von (6) über ein kleines vierdimensionales Volumen sieht. Eine solche ist vielmehr gegeben durch

$$\begin{aligned} A^{(1)}(\sigma^2; \kappa^2) &= \frac{\kappa^2}{4\pi} \begin{cases} \frac{N_1(\sqrt{\kappa^2 \sigma^2})}{\sqrt{\kappa^2 \sigma^2}} & \kappa^2 \sigma^2 > 0 \\ \frac{N_1(\sqrt{\kappa^2 \sigma^2}) - i J_1(\sqrt{\kappa^2 \sigma^2})}{\sqrt{\kappa^2 \sigma^2}} & \kappa^2 \sigma^2 < 0 \end{cases} = \frac{\kappa^2}{4\pi} \operatorname{Re} \left(\frac{N_1(\sqrt{\kappa^2 \sigma^2})}{\sqrt{\kappa^2 \sigma^2}} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \left\{ \frac{-2}{\sigma^2} + \kappa^2 \log \frac{\gamma}{2} |\sqrt{\kappa^2 \sigma^2}| - \frac{\kappa^2}{2} + \dots \right\}. \end{aligned} \quad (8)$$

⁴⁾ W. Pauli u. F. Villars, Rev. mod. Physics 21, 434 (1949).

Diese Lösung vermeidet den Sprung des Imaginärteils von (7b). Sie verschwindet für große Werte von $|\sigma^2|$. Schwinger³⁾ (A. 31) hat sie aus ihrer Fourierintegral-Darstellung berechnet:

$$\begin{aligned} \Delta^{(1)}(\sigma^2; \kappa^2) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \exp(i k_\mu x_\mu) \delta(k_\mu^2 + \kappa^2) (dk) \\ &= \frac{\kappa^2}{4\pi} \operatorname{Im} \frac{H_1^{(1)}(\sqrt{\kappa^2 \sigma^2})}{\sqrt{\kappa^2 \sigma^2}} = \begin{cases} \frac{\kappa^2}{4\pi} \frac{N_1(\sqrt{\kappa^2 \sigma^2})}{\sqrt{\kappa^2 \sigma^2}} & ; \kappa^2 \sigma^2 > 0 \\ \frac{\kappa^2}{2\pi^2} \frac{K_1(\sqrt{-\kappa^2 \sigma^2})}{\sqrt{-\kappa^2 \sigma^2}} & ; \kappa^2 \sigma^2 < 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (9)$$

Daß sich die erste Lösung (7a) nach dieser Methode nicht unmittelbar ergibt, ist wegen ihres Verhaltens für große $|\sigma^2|$ verständlich. Es sei nur erwähnt, daß sie jedoch durch eine Abänderung des Weges in Schwingers Formel A. 34 (Umlauf um den Nullpunkt) hereinkommt.

Lassen wir die Forderung nach Zeitsymmetrie fallen, so können die Lösungen der homogenen Mesongleichung innerhalb der Lichtkegel noch vom Vorzeichen der Zeitkoordinate abhängen. Es gilt nach wie vor, daß in jedem der invarianten Gebiete des Minkowskiraumes die Lösungen sich als Linearkombinationen von (7a, b) schreiben lassen, nur sind Vor- und Nachkegel jetzt für sich invariant. Machen wir eine Fouriertransformation, so bedeutet die Lorentzinvarianz im k -Raum, daß $\tilde{\varphi}$ in jedem seiner drei invarianten Gebiete nur von k_μ^2 abhängt. (6) lautet im Unterbereich:

$$(k_\mu^2 + \kappa^2) \tilde{\varphi}(k) = 0. \quad (10)$$

Demnach läßt sich jede Lösung so schreiben:

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{(2\pi)^3} \int c_i(k_\mu^2) \delta(k_\mu^2 + \kappa^2) \exp(i k_\mu x_\mu) (dk); \quad \begin{cases} R_1 \\ R_2 \end{cases} k_\mu^2 < 0; \quad \begin{cases} k_0 > 0 \\ k_0 < 0 \end{cases} \\ R_3 k_\mu^2 > 0. \quad (11)$$

Der δ -Faktor im Integranden bewirkt, daß wir an Stelle der Funktionen c_i auch konstante Faktoren setzen können.

$\kappa^2 > 0$. Wegen des δ -Faktors verschwindet das Integral über R_3 . $c_1 = c_2$ ergibt bis auf einen unwesentlichen Faktor die uns schon bekannte $\Delta^{(1)}$ -Funktion. $c_1 = -c_2$ definiert die Δ -Funktion. Durch Linearkombination dieser beiden lassen sich alle mit unserer Methode ableitbaren Lösungen erhalten.

$$\begin{aligned} \Delta(x; \kappa^2) &= \frac{-i}{(2\pi)^3} \int \frac{k_0}{|k_0|} \delta(k_\mu^2 + \kappa^2) \exp(i k_\mu x_\mu) (dk) \\ &= \frac{x_0}{|x_0|} \left[-\frac{\delta(\sigma^2)}{2\pi} + \frac{\kappa^2}{4\pi} \operatorname{Re} \frac{H_1^{(1)}(\sqrt{\kappa^2 \sigma^2})}{\sqrt{\kappa^2 \sigma^2}} \right] \end{aligned} \quad (12)$$

$\kappa^2 < 0$. Die Integrale über R_1 und R_2 verschwinden. Das Integral über R_3 gibt bis auf einen Faktor die $\Delta^{(1)}$ -Funktion.

Für die Aufstellung von Minus-Vertauschungsrelationen in der Quantentheorie braucht man lorentzinvariante Lösungen der homogenen Gleichung, die überdies ungerade sind, d. h. bei Spiegelung des Vierervektors x ihr Vorzeichen

³⁾ J. Schwinger, Physic. Rev. 75, 651 (1949) Appendix.

wechseln⁶⁾). Für $\kappa^2 > 0$ haben wir genau eine solche Funktion erhalten, nämlich die bekannte Δ -Funktion im Falle $\kappa^2 < 0$ hingegen keine, ein Ergebnis, das für eine Quantelung derartiger Wellenfelder von Bedeutung ist.

4. Symmetrische Greensche Funktionen der Mesongleichung

Wir verschaffen uns zunächst eine zeitsymmetrische Lösung der Gleichung

$$(\square - \kappa^2) \psi(x) = -\delta(x). \quad (13)$$

Für $\kappa^2 = 0$ ergibt sich, wie man durch Integration über eine kleine Umgebung des Nullpunktes im Minkowskiraum leicht bestätigt, die bekannte \bar{D} -Funktion (Schwinger I. c. A. 23)

$$\square \bar{D}(x) = -\delta(x); \quad \bar{D}(x) = \frac{1}{4\pi} \delta(\sigma^2) = \frac{1}{8\pi^2} \int e^{i\sigma^2 x} dx. \quad (14)$$

Dies führt auf den Ansatz (eindimensionales Fourierintegral)

$$\psi(\sigma^2) = \frac{1}{8\pi^2} \int e^{i\sigma^2 x} f(x) dx. \quad (15)$$

Wir setzen in (13) ein, ersetzen die rechte Seite durch (14) und spezialisieren den \square -Operator auf Differentiation nach der Invarianten σ^2 :

$$-4 \left[\sigma^2 \frac{d^2}{(d\sigma^2)^2} + 2 \frac{d}{d\sigma^2} \right] \int e^{i\sigma^2 x} [f(x) - 1] dx - \kappa^2 \int e^{i\sigma^2 x} f(x) dx = 0. \quad (16)$$

Nach einer partiellen Integration erhalten wir aus dieser formalen Rechnung als Bedingung für das Verschwinden des Integranden die Differentialgleichung:

$$4\sigma^2 i f' - \kappa^2 f = 0 \quad (17)$$

mit der Lösung

$$f(x) = c \cdot e^{\frac{i\kappa^2}{4\sigma^2} x^2}. \quad (18)$$

Somit lautet die gesuchte Integraldarstellung

$$\psi(\sigma^2) = \frac{1}{8\pi^2} \int \exp(i\sigma^2 x + i\kappa^2/4 x) dx. \quad (19)$$

Schwinger (A. 15) fand dieselbe Formel, ausgehend von

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} P \int \frac{\exp(i k_\mu x_\mu)}{k_\mu^2 + \kappa^2} (dk), \quad (20)$$

jedoch benutzt er als Integrationsweg die reelle Achse (A. 13 wird für komplexe a sinnlos). Wir trennen den Summanden \bar{D} ab und können dann nach dem Jordanschen Lemma den Integrationsweg durch einen großen Halbkreis schließen, dessen Lage vom Vorzeichen von σ^2 abhängt. Der wesentlich singuläre Punkt $\alpha = 0$ des Integranden wird umgangen. (Weg A \curvearrowleft , Weg B \curvearrowright)

$$\psi(\sigma^2) = \bar{D}(x) + \frac{|\kappa^2|}{8\pi^2} \int \exp(i\sigma^2 \kappa^2 \beta) [\exp(i/4\beta) - 1] d\beta. \quad (21)$$

⁶⁾ W. Thirring, Acta physica Austriaca 4, 125 (1950). Jedoch ist Gl. (5) dieser Arbeit nicht in Ordnung, weil der restliche Integrand bei der Integration über eine Umgebung des Nullpunkts im Minkowskiraum noch L enthält. Das vor (5) definierte f ist unser $4\pi \bar{J}$ (s. u.) und genügt nicht der homogenen Gleichung. Überdies erscheint die Ausschließung der Neumannschen Funktion aus „physikalischen Endlichkeitsforderungen“ nicht überzeugend, weil das Ergebnis dann doch schließlich die singuläre δ -Funktion enthält.

Das Residuum ist bis auf eine kleine Umformung eine bekannte Integraldarstellung der Besselfunktion. Wir erhalten entsprechend den beiden Wegen die Lösungen:

$$\psi_A(\sigma^2) = \bar{A}(\sigma^2; \kappa^2) = \bar{D} - \begin{cases} \frac{|\kappa^2|}{8\pi} \frac{J_1(\sqrt{\kappa^2 \sigma^2})}{\sqrt{\kappa^2 \sigma^2}} & \kappa^2 \sigma^2 > 0 \\ 0 & \kappa^2 \sigma^2 < 0 \end{cases} \quad (22)$$

$$\psi_B(\sigma^2) = \bar{D} + \begin{cases} 0 & \kappa^2 \sigma^2 > 0 \\ \frac{|\kappa^2|}{8\pi} \frac{J_1(\sqrt{\kappa^2 \sigma^2})}{\sqrt{\kappa^2 \sigma^2}} & \kappa^2 \sigma^2 < 0. \end{cases}$$

Weg A führt bei $\kappa^2 > 0$ zu der von Schwinger angegebenen Lösung. Wegen der besonderen Natur der Singularität darf man diesen Weg auch längs der Achse also durch den singulären Punkt hindurch legen. Wir bezeichnen ψ_A mit $\bar{A}(\sigma^2; \kappa^2) \equiv \bar{A}(x; \kappa^2)$ und bemerken, daß es für große $|\sigma^2|$ verschwindet.

ψ_B divergiert exponentiell für große negative $\kappa^2 \sigma^2$. Die Differenz beider Lösungen ist natürlich eine unserer Lösungen der homogenen Gl. (7a).

Eine andere Möglichkeit zur Gewinnung einer zeitsymmetrischen Greenschen Funktion ist die Berechnung der halben Summe aus der retardierten und der avancierten Lösung von (3). Dazu benötigt man eine Integraldarstellung, die die Schließung des Integrationsweges durch einen großen Halbkreis erlaubt, dessen Lage durch das Vorzeichen der Zeit-Koordinate bestimmt wird¹⁾. Eine solche ist durch

$$\frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{\exp(i k_\mu x_\mu)}{k_\mu^2 + \kappa^2} (dk) \text{ gegeben.} \quad (20')$$

Dabei ist die k_0 -Integration zuerst auszuführen. Der Weg verläuft in der komplexen k_0 -Ebene für die retardierte Lösung oberhalb, für die avancierte unterhalb der Singularitäten des Integranden. Im Falle $\kappa^2 > 0$ kommt man auf die Hauptwertvorschrift und damit auf die Schwingersche Lösung zurück. Für negative κ^2 muß sich jedoch nach diesem Verfahren auch eine Lösung ergeben, die im Zwischengebiet verschwindet: ψ_B ²⁾.

Wir beschränken uns im folgenden aus physikalischen Gründen auf diejenigen Greenschen Funktionen, die für große $|\sigma^2|$ verschwinden, d. h. auf \bar{A} . Von der Möglichkeit, die $A^{(1)}$ -Funktion zu überlagern, was einer Abänderung der Wegvorschrift bei der k_0 -Integration entspräche, machen wir keinen Gebrauch. Es sei nur erwähnt, daß man dann für $\kappa^2 > 0$ zur Feynmanschen Funktion³⁾

$$I_+ = \frac{1}{2i} A_F = -A_+ = -(\bar{A} + \frac{i}{2} A^{(1)}) = -\bar{D} + \frac{\kappa^2}{8\pi} \frac{H_1^{(2)}(\sqrt{\kappa^2 \sigma^2})}{\sqrt{\kappa^2 \sigma^2}} \quad (23)$$

kommt. Sie klingt in raumartigen Richtungen sogar exponentiell ab und ist eine zeitsymmetrische Greensche Funktion, deren Fourierzerlegung für $t > 0$ nur positive, für $t < 0$ nur negative Frequenzen enthält, wie man bei der k_0 -Integration unmittelbar erkennt (Weg

¹⁾ A. Pais u. G. E. Uhlenbeck, Physic. Rev. **70**, 145 (1950); P. 159.

²⁾ R. P. Feynman, Physic. Rev. **76**, 749 (1949), Formel (34). Vgl. auch Stückelbergs Funktion $D^e = A_+$.

5. Überlagerung von symmetrischen Greenschen Funktionen der Mesongleichung

Wir betrachten Überlagerungen von \bar{A} -Funktionen für verschiedene κ^2 ($\kappa^2 = 0$ einbegriffen)⁴⁾

$$\bar{G}(\sigma^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{A}(\sigma^2; \kappa^2) \varrho(\kappa^2) d\kappa^2. \quad (24)$$

Da κ^2 proportional zum Quadrat einer Masse ist, wird die Funktion $\varrho(\kappa^2)$ manchmal als „Massenspektrum“ bezeichnet; formal treten bei uns auch imaginäre „Massen“ auf, da uns auch Greensche Funktionen interessieren, die im Zwischengebiet von Null verschieden sind. Diese Bezeichnungen sind hier nur als eine Redeweise zu betrachten, die Frage nach den beobachtbaren Teilchen ist eine Frage der Quantentheorie.

Die Umkehrung von (24) lautet:

$$\varrho(\kappa^2) = 16\pi^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{A}(\kappa^2; \sigma^2) \bar{G}(\sigma^2) d\sigma^2. \quad (25)$$

Dabei wurde die durch Ausrechnung zu bestätigende Formel

$$\delta(x^2 - z^2) = 16\pi^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{A}(x^2; y^2) \bar{A}(y^2; z^2) dy^2 \quad (26)$$

benutzt.

$\bar{G}(\sigma^2)$ verschwindet für große $|\sigma^2|$. Die Singularitäten von \bar{A} , die sich durch (24) auf \bar{G} übertragen, heben sich heraus, wenn die Pauli-Villarsschen Regularisierungsbedingungen⁴⁾ erfüllt sind.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varrho(\kappa^2) d\kappa^2 = 0 \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \varrho(\kappa^2) \kappa^2 d\kappa^2 = 0. \quad (27a, b)$$

Dann ist also \bar{G} regulär. Man kann noch fordern, daß es normiert sei

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{G}(\sigma^2) d\sigma^2 = \frac{1}{4\pi}. \quad (28)$$

Diese Forderung braucht man in einer verallgemeinerten Elektrodynamik¹⁾, damit sich für große Entfernungen als statisches Potential einer Punktladung das Coulomb-Potential ergibt (s. u.). Wie man aus (24) sieht, ist die Erfüllung von (28) nur möglich, wenn $\varrho(\kappa^2)$ den Summanden $\delta(\kappa^2)$ enthält, denn

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \bar{A}(x^2; y^2) d\kappa^2 = \begin{cases} 0 & y^2 \geq 0 \\ \frac{1}{4\pi} & y^2 = 0. \end{cases} \quad (29)$$

Die Überlagerung muß also auch ein Maxwellfeld enthalten. Mesonfelder allein können wegen ihrer endlichen Reichweite nicht das Coulombfeld ergeben.

Wir berücksichtigen die letzte Forderung durch

$$\varrho(\kappa^2) = \delta(\kappa^2) - P(\kappa^2). \quad (30)$$

Die Regularitätsbedingungen heißen dann:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(\kappa^2) d\kappa^2 = 1; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \kappa^2 P(\kappa^2) d\kappa^2 = 0. \quad (31)$$

Aus (24) wird mit (27) und (30)

$$(24) \quad \bar{G}(\sigma^2) = \frac{1}{8\pi} \begin{cases} \int_0^\infty \sigma^2 \frac{J_1(\sqrt{\sigma^2 \sigma^2})}{\sqrt{\sigma^2 \sigma^2}} \mathbf{P}(\sigma^2) d\sigma^2; \sigma^2 \geq 0 \\ \int_0^\infty |\sigma^2| \frac{J_1(\sqrt{\sigma^2 \sigma^2})}{\sqrt{\sigma^2 \sigma^2}} \mathbf{P}(\sigma^2) d\sigma^2; \sigma^2 \leq 0 \end{cases} = \frac{1}{8\pi \sigma^4} \int_0^\infty y J_1(y) \mathbf{P}\left(\frac{y^2}{\sigma^2}\right) dy^2. \quad (32)$$

Die Funktion $\mathbf{P}(\sigma^2)$ bestimmt für negatives Argument das Verhalten von \bar{G} im Zwischengebiet, für positives Argument im Lichtkegel. Die Umkehrung heißt:

$$(25) \quad \mathbf{P}(\sigma^2) = 2\pi \begin{cases} \int_0^\infty \sigma^2 \frac{J_1(\sqrt{\sigma^2 \sigma^2})}{\sqrt{\sigma^2 \sigma^2}} \bar{G}(\sigma^2) d\sigma^2; \sigma^2 > 0 \\ \int_0^\infty |\sigma^2| \frac{J_1(\sqrt{\sigma^2 \sigma^2})}{\sqrt{\sigma^2 \sigma^2}} \bar{G}(\sigma^2) d\sigma^2; \sigma^2 < 0 \end{cases} = \frac{2\pi}{\sigma^4} \int_0^\infty y J_1(y) \bar{G}\left(\frac{y^2}{\sigma^2}\right) dy^2. \quad (33)$$

Man erkennt, daß die Beziehung zwischen G und \mathbf{P} im wesentlichen durch eine Hankeltransformation gegeben ist und könnte daraus mathematische Forderungen an \bar{G} und \mathbf{P} entnehmen, jedoch interessieren in der Physik oft Grenzfälle, wie etwa ein diskretes Massenspektrum.

Aus der Formel

$$(26) \quad \int_0^\infty [\bar{D}(\sigma^2) - \bar{A}(\sigma^2; \sigma^2)] \exp(-p\sigma^2) d\sigma^2 = \frac{1}{4\pi} \left[1 - \exp\left(-\frac{\sigma^2}{4p}\right) \right]; \sigma^2 > 0 \quad (34)$$

können wir herleiten, daß zwischen den Laplace-Transformierten von \bar{G} und \mathbf{P} ein einfacher Zusammenhang besteht:

$$(27) \quad 4\pi \int_0^\infty \bar{G}(\pm\sigma^2) \exp(-p\sigma^2) d\sigma^2 = 1 - \int_0^\infty \mathbf{P}(\pm\sigma^2) \exp\left(-\frac{\sigma^2}{4p}\right) d\sigma^2. \quad (35)$$

6. Die symmetrische verallgemeinerte Wellengleichung

Eine verallgemeinerte Wellengleichung ist gegeben durch die Funktion $\varepsilon(x)$ oder etwa durch deren vierdimensionale Fouriertransformierte $\tilde{\varepsilon}(k)$. Im zeitsymmetrischen Fall⁹⁾¹⁰⁾ ist ε eine Funktion von x_μ^2 und $\tilde{\varepsilon}$ eine Funktion von k_μ^2 . Aus (3) folgt:

$$(28) \quad k_\mu^2 \tilde{\varepsilon}(k_\mu^2) \tilde{\bar{G}}(k_\mu^2) = 1. \quad (36)$$

Der Zusammenhang zwischen einer zeitsymmetrischen Wellengleichung und ihrer Greenschen Funktion wird also hergestellt, indem wir $\tilde{\bar{G}}$ durch \bar{G} ausdrücken. Dabei können wir die vierfache Integration auf eine einfache zurückführen.

$$(29) \quad \tilde{\bar{G}}(k_\mu^2) = \int \bar{G}(-x_\mu^2) \exp(-ik_\mu x_\mu) (dx) = \iint \bar{G}(\sigma^2) \delta(\sigma^2 + x_\mu^2) \exp(ik_\mu x_\mu) d\sigma^2 (dx).$$

Die Integrationen werden vertauscht. Wir benutzen (9). (37)

$$(30) \quad \tilde{\bar{G}}(k_\mu^2) = 8\pi^3 \int A^{(1)}(-k_\mu^2; \sigma^2) \bar{G}(\sigma^2) d\sigma^2. \quad (38)$$

Aus dieser Formel entnehmen wir, daß $\tilde{\bar{G}}$ in Sonderfällen eine analytische Funktion, im allgemeinen der Realteil einer solchen ist. Ihre Umkehrung lautet

$$(31) \quad \bar{G}(\sigma^2) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \tilde{\bar{G}}(k_\mu^2) \exp(ik_\mu x_\mu) (dk) = \frac{1}{2\pi} \int A^{(1)}(\sigma^2; -k_\mu^2) \tilde{\bar{G}}(k_\mu^2) dk_\mu^2. \quad (39)$$

⁹⁾ R. P. Feynman, Physic. Rev. **74**, 939 (1948).

¹⁰⁾ H. McManus, Proc. Roy. Soc. London (A) **195**, 323 (1948).

Im Integranden von (38) bleibt \tilde{G} immer endlich, es ist ja die regularisierte Green-sche Funktion. Hingegen erfordern die Singularitäten von \tilde{G} eine Wegvorschrift zum Integral (39). Seine Auswertung gelingt manchmal mit Hilfe des Residuensatzes (s. u.). Wenn wir uns auf den regularisierten Fall beschränken, können wir auch schreiben¹¹⁾:

$$\begin{aligned}\tilde{G}(\sigma^2) &= -\frac{1}{2\pi^2} \frac{1}{|\sigma^2|} \int_0^\infty \left\{ \frac{K_1(y)}{\tilde{\epsilon}(y^2/\sigma^2)} + \frac{(\pi/2) N_1(y)}{\tilde{\epsilon}(-y^2/\sigma^2)} \right\} dy \\ &= \frac{1}{\pi^2} \frac{d}{d\sigma^2} \frac{\sigma^2}{|\sigma^2|} \int_0^\infty \left\{ \frac{K_0(y)}{\tilde{\epsilon}(y^2/\sigma^2)} + \frac{(\pi/2) N_0(y)}{\tilde{\epsilon}(-y^2/\sigma^2)} \right\} \frac{dy}{y}.\end{aligned}\quad (40)$$

Nun geben wir den Zusammenhang von \tilde{G} bzw. $1/\tilde{\epsilon}$ mit \mathbf{P} an. Man benutzt (24), (25), (38), (39) und führt die σ^2 -Integration aus. Zur Kontrolle kann man Formeln verwenden, die aus der Schwingerschen⁶⁾ Integraldarstellung von $\mathbf{P}\left(\frac{1}{x+y}\right)$ folgen:

$$f(x) = P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(y)}{x+y} dy; \quad g(y) = \frac{1}{\pi^2} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{x+y} dx; \quad (41a, b)$$

$$\delta(a-b) = \frac{1}{\pi^2} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(z+a)(z+b)} \quad (41c)$$

$$\tilde{G}(k_\mu^2) = P \int \frac{\varrho(x^2)}{x^2 + k_\mu^2} dx^2; \quad \varrho(x^2) = \frac{1}{\pi^2} P \int \frac{\tilde{G}(k_\mu^2)}{k_\mu^2 + x^2} dk_\mu^2 \quad (42a, b)$$

$$1/\tilde{\epsilon}(k_\mu^2) = P \int \frac{x^2 \mathbf{P}(x^2)}{x^2 + k_\mu^2} dx^2; \quad x^2 \mathbf{P}(x^2) = \frac{1}{\pi^2} P \int \frac{dk_\mu^2}{\tilde{\epsilon}(k_\mu^2)(k_\mu^2 + x^2)}. \quad (43a, b)$$

Für die Rechnung verwendet man am besten

$$\Delta^{(1)}(\sigma^2; x^2) = \frac{x^2}{2\pi^2} \operatorname{Re} \frac{K_1(\sqrt{-\sigma^2} x^2)}{\sqrt{-\sigma^2} x^2} = \frac{x^2}{2\pi^2} \frac{K_1(\sqrt{-\sigma^2} x^2)}{\sqrt{-\sigma^2} x^2} + \frac{\pi i}{2} \frac{J_1(\sqrt{\sigma^2} x^2)}{\sqrt{\sigma^2} x^2} \quad \begin{array}{ll} 0 & \sigma^2 x^2 < 0 \\ & \\ 0 & \sigma^2 x^2 > 0. \end{array} \quad (9a)$$

Diskutieren wir als Beispiel (43a), so ergibt sich zunächst das Integral ohne „ P^+ “ mit der Wegvorschrift, daß der Pol für negative x^2 nach oben, für positive nach unten zu umgehen ist. Hinzu kommt ein Summand $-\frac{k_\mu^2}{|k_\mu^2|} \pi i \mathbf{P}(-k_\mu^2)$ von der Besselfunktion her, der das Ergebnis reell macht. Wir könnten auch „Realteil“ vor der Integral schreiben. Singularitäten von $1/\tilde{\epsilon}(k_\mu^2)$ auf der reellen Achse können nur da auftreten, wo $k_\mu^2 \mathbf{P}(-k_\mu^2)$ singulär ist. (43b) gibt die Umkehrung. Auf funktionentheoretische Betrachtungen, die man hier anschließen könnte, wollen wir nicht eingehen. Es sei noch daran erinnert, daß wir des öfteren die Reihenfolge von Integrationen vertauscht haben. Bei der Anwendung dieser Formeln ist also einige Vorsicht geboten.

Aus (43) lesen wir ab, daß $1/\tilde{\epsilon}$ für kleine Argumente gegen 1 und für große Argumente gegen 0 geht. $\epsilon(x_\mu^2)$ ist daher in den von uns betrachteten Fällen singu-

¹¹⁾ Spezialfall in ⁷⁾.

lär und bestenfalls durch δ -Funktionen und ihre Ableitungen ausdrückbar. Entsprechendes gilt für die Lagragedichte.

Für die Benutzung von Formel (43) kann eine Umformung zweckmäßig sein, welche die Benutzung von Tabellen zur Laplace-Transformation ermöglicht.

$$\frac{1}{\tilde{\epsilon}(k_\mu^2)} = \int_0^\infty dp \exp(-p k_\mu^2) \int_0^\infty d\kappa^2 \cdot \kappa^2 \mathbf{P}(\kappa^2) \exp(-p \kappa^2); k_\mu^2 > 0; \mathbf{P} \equiv 0, \kappa^2 < 0 \quad (44)$$

$$\frac{1}{\tilde{\epsilon}(k_\mu^2)} = \int_0^\infty dp \exp(p k_\mu^2) \int_0^\infty d\kappa^2 \cdot \kappa^2 \mathbf{P}(-\kappa^2) \exp(-p \kappa^2); k_\mu^2 < 0; \mathbf{P} \equiv 0, \kappa^2 > 0. \quad (44)$$

Im jeweils fehlenden Bereich des Arguments ist $1/\tilde{\epsilon}$ der Realteil der analytischen Fortsetzung.

7. Periodische Erregung durch eine Punktquelle

Das zur periodischen Erregung durch eine Punktquelle gehörige Potential ist durch (4) definiert. Die Beziehung der Funktion K zu \bar{G} lässt sich leicht angeben

$$K(x; \omega_0) = \int \bar{G}(x - x') \delta(x'_1) \delta(x'_2) \delta(x'_3) e^{i \omega_0 t'} (dx') = \int \bar{G}(x_1, x_2, x_3, t - t') e^{i \omega_0 t'} dt'. \quad (45)$$

Wir führen die Fouriertransformierte von \bar{G} ein:

$$K(x; \omega_0) = \frac{1}{(2\pi)^3} \exp(i \omega_0 t) \int \tilde{\bar{G}}(|\mathbf{k}|^2 - \omega_0^2) \exp(i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) dk_1 dk_2 dk_3. \quad (46)$$

Nun erlaubt Formel (42a) die Umrechnung auf ϱ .

$$K(x; \omega_0) = \frac{1}{4\pi^2 i r} \exp(i \omega_0 t) \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(i |\mathbf{k}| r) \cdot |\mathbf{k}|}{|\mathbf{k}|^2 - \omega_0^2 + \kappa^2} d|\mathbf{k}| \varrho(\kappa^2) d\kappa^2. \quad (47)$$

Als Ergebnis erhalten wir schließlich durch Anwendung des Residuensatzes:

$$K(x; \omega_0) = \frac{\exp(i \omega_0 t)}{2\pi r} \left[\int_{-\infty}^{\omega_0^2} \cos(r \sqrt{\omega_0^2 - \kappa^2}) \varrho(\kappa^2) d\kappa^2 + \frac{1}{2} \int_{\omega_0^2}^{\infty} \exp(-r \sqrt{\kappa^2 - \omega_0^2}) \varrho(\kappa^2) d\kappa^2 \right]. \quad (48)$$

Durch die Spezialisierung $\omega_0 = 0$ und $\varrho \equiv 0, \kappa^2 < 0$ ergibt sich das statische Potential:

$$eK(x; 0) = \frac{e}{4\pi r} \int_0^\infty \exp(-\kappa r) \varrho(\kappa^2) d\kappa^2. \quad (49)$$

Durch Anwendung des Laplaceschen Operators folgen die Quellen dieses Feldes („Polarisation des Vakuums“)

$$\Delta [eK(x; 0)] = -\frac{e}{4\pi r} \int_0^\infty \exp(-\kappa r) \kappa^2 \mathbf{P}(\kappa^2) d\kappa^2. \quad (49a)$$

K lässt sich natürlich auch durch \bar{G} ausdrücken.

$$K(x; 0) = \int_0^\infty \frac{\bar{G}(\sigma^2)}{\sqrt{\sigma^2 + r^2}} d\sigma^2. \quad (50)$$

Wir notieren noch den Zusammenhang von \mathbf{P} mit der Boppschen Potentialoberfunktion $\Phi(s)$ ¹²⁾

$$\Phi(s) = 1 - \int_0^{(s/2\mu)^2} \mathbf{P}(x^2) dx^2; \quad \mathbf{P}(x^2) \equiv 0, \quad x^2 < 0. \quad (51)$$

8. Die retardierte Greensche Funktion

Die retardierte Greensche Funktion der Mesongleichung ist durch $\Delta^{\text{ret}} \equiv 0$ für $t < 0$ definiert. Sie ist eindeutig bestimmt, da nur die identisch verschwindende Lösung der homogenen Gleichung für $t < 0$ verschwindet. Wegen der Lorentzinvianranz verschwindet Δ^{ret} im ganzen Zwischengebiet. Zu seiner Berechnung gehen wir von der Integraldarstellung der Greenschen Funktionen aus

$$\Delta^{\text{ret}}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{\exp(i k_\mu x_\mu)}{k_\mu^2 + x^2} (dk), \quad (52)$$

die sich nach Fouriertransformation von (13) leicht ergibt. Wir integrieren zunächst über geschlossene Wege um je einen der Pole in der komplexen k_0 -Ebene, führen dann die restlichen Integrationen aus und nennen die Ergebnisse G_1 und G_2 . G_1 entspricht bei positivem x^2 dem Pol auf der negativ reellen Achse.

$$G_1(x_0 > 0) = -G_2(x_0 < 0) = -\delta(\sigma^2)/4\pi + \frac{x^2}{8\pi} \frac{H_1^{(1)}(\kappa\sigma)}{\kappa\sigma}. \quad (53)$$

$$G_2(x_0 > 0) = -G_1(x_0 < 0) = -\delta(\sigma^2)/4\pi + \frac{x^2}{8\pi} \frac{H_1^{(2)}(\kappa\sigma)}{\kappa\sigma}.$$

Falls $\sigma^2 < 0$, heißt es $i\kappa\sqrt{-\sigma^2}$ in der ersten Formel und $-i\kappa\sqrt{-\sigma^2}$ in der zweiten. Aus diesen beiden Funktionen können wir alle aufbauen, die wir mit $\bar{\Delta}$ bezeichnet haben ($x^2 > 0$); sie unterscheiden sich durch die Integrationswege in der komplexen k_0 -Ebene und entstehen durch Anwendung der Residuenmethode. Bei den Greenschen Funktionen läuft der Weg von $-\infty$ nach $+\infty$. Führen wir ihn oberhalb der beiden Pole, so erhalten wir die retardierte Lösung:

$$\begin{aligned} \Delta^{\text{ret}}(x; x^2) &= \delta(\sigma^2)/2\pi - \frac{x^2}{4\pi} \frac{J_1(\kappa\sigma)}{\kappa\sigma} \quad \sigma^2 \geq 0, x_0 > 0 \\ &= 0 \quad \text{sonst.} \end{aligned} \quad (54)$$

Für $x^2 < 0$ divergiert dieser Ausdruck [vgl. 7)] exponentiell für große σ^2 . Wir betrachten daher nur $x^2 > 0$ und können auch schreiben

$$\Delta^{\text{ret}}(x; x^2) = \bar{\Delta}(x; x^2) - 1/2 \Delta(x; x^2) = \begin{cases} 2\bar{\Delta} & x_0 > 0 \\ 0 & x_0 < 0. \end{cases} \quad (54a)$$

Nun überlagern wir wieder die Lösungen der Mesongleichung

$$G^{\text{ret}}(x) = \int_0^{\infty} \Delta^{\text{ret}}(x; x^2) \varrho(x^2) dx^2 = \begin{cases} 2 \int_0^{\infty} \bar{\Delta}(x; x^2) \varrho(x^2) dx^2 = 2\bar{G}(\sigma^2); & \sigma^2 \geq 0, x_0 > 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (55)$$

Die Zuordnung von $\bar{G}(\sigma^2)$ und $\varrho(x^2)$ ist genau wie in (24), nur ist $\bar{G} \equiv 0$ für $\sigma^2 < 0$ und $\varrho(x^2) \equiv 0$ für $x^2 < 0$ zu setzen. Die Normierung und die Regularitätsbedingungen sind die gleichen wie vorher.

¹²⁾ Für die Bezeichnungen s. 1).

9. Die verallgemeinerte Wellengleichung

Die zu einer retardierten Greenschen Funktion gehörige Wellengleichung braucht nicht zeitsymmetrisch zu sein. An Stelle von (36) schreiben wir daher

$$k_\mu^2 \tilde{\varepsilon}(k) \tilde{G}^{\text{ret}}(k) = 1. \quad (36a)$$

Die Rechnung (37), (38) geht etwas anders

$$\begin{aligned} \tilde{G}^{\text{ret}}(k) &= 2 \int_{\substack{x_0 > 0 \\ x_\mu^2 < 0}} \bar{G}(-x_\mu^2) \exp(-i k_\mu x_\mu) (dx) \\ &= 2 \int_{\substack{x_0 < 0 \\ x_\mu^2 < 0}} \int_0^\infty \bar{G}(\sigma^2) \delta(\sigma^2 + x_\mu^2) \exp(i k_\mu x_\mu) d\sigma^2 (dx). \end{aligned} \quad (56)$$

Durch das Integral

$$\int_{\substack{x_0 < 0 \\ x_\mu^2 < 0}} \delta(\sigma^2 + x_\mu^2) \exp(i k_\mu x_\mu) (dx) = -4\pi^3 i [\Delta(k; \sigma^2) + i \Delta^{(1)}(k; \sigma^2)] \quad (57)$$

$$= -4\pi^3 i \Delta^{(-)}(k; \sigma^2)$$

ist die Funktion $\Delta^{(-)}$ definiert.

$$\Delta^{(-)}(k; \sigma^2) = \Delta(k; 0) + i \sigma \begin{cases} \frac{1}{2\pi^2} \frac{K_1(\sigma \sqrt{k_\mu^2})}{\sqrt{k_\mu^2}}; & k_\mu^2 > 0 \\ \frac{1}{4\pi \sqrt{-k_\mu^2}} \left[N_1(\sigma \sqrt{-k_\mu^2}) - i \frac{k_0}{|k_0|} J_1(\sigma \sqrt{-k_\mu^2}) \right]; & k_\mu^2 < 0. \end{cases} \quad (58)$$

Bei der entsprechenden Integration über den Nachkegel entsteht die $\Delta^{(+)}$ Funktion. Vertauschung der Integrationen in (56) liefert uns das Ergebnis

$$\tilde{G}^{\text{ret}}(k) = -8\pi^3 i \int_0^\infty \Delta^{(-)}(k; \sigma^2) \bar{G}(\sigma^2) d\sigma^2; \quad \bar{G} = \frac{1}{2} G^{\text{ret}} \text{ im Nachkegel (55).} \quad (59)$$

Für die avancierte Lösung wäre $\Delta^{(-)}$ durch $\Delta^{(+)}$ zu ersetzen.

Um die noch fehlende Relation zwischen \tilde{G}^{ret} und ϱ zu erhalten, setzen wir aus (24) ein. Verglichen mit dem symmetrischen Fall tritt hier ein von Δ herrührender Zusatzterm auf.

$$\begin{aligned} \tilde{G}^{\text{ret}}(k) &= P \int_0^\infty \frac{\varrho(\kappa^2) d\kappa^2}{\kappa^2 + k_\mu^2} + i\pi \frac{k_0}{|k_0|} \varrho(-k_\mu^2); \quad \varrho(\kappa^2) \equiv 0, \quad \kappa^2 < 0. \\ &= -P \int_0^\infty \frac{P(\kappa^2) d\kappa^2}{\kappa^2 + k_\mu^2} - i\pi \frac{k_0}{|k_0|} P(-k_\mu^2) + \tilde{\Delta}^{\text{ret}}(k; 0). \end{aligned} \quad (60)$$

Für $k_\mu^2 > 0$ ist der zweite Summand Null, das „P“-Zeichen überflüssig. Bei negativem k_μ^2 lassen sich die beiden ersten Terme zusammenfassen, denn der zweite ergänzt den beim Hauptwert vorliegenden Weg zu einer Umgehung des Poles. Für die Umkehrung dieser Relation bilden wir zunächst den Realteil von (60) und erhalten dann wie (41)

$$\varrho(\kappa^2) = \frac{1}{\pi^2} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Re} \tilde{G}^{\text{ret}}(k)}{k_\mu^2 + \kappa^2} dk_\mu^2; \quad \kappa^2 \geq 0. \quad (61)$$

10. Diskussion und Beispiele

a) Symmetrische Greensche Funktion $G(x) = \bar{G}(\sigma^2)$.

$1/\tilde{\epsilon}(k_\mu^2)$ ist nach (38), (8) der Realteil einer analytischen Funktion. Wir heben zwei oft behandelte Sonderfälle hervor, die auch gleichzeitig vorliegen können.

$\alpha)$ $\tilde{\epsilon}(k_\mu^2)$ ist selbst eine analytische Funktion, die für reelles Argument reelle Werte annimmt;

$\beta)$ $\bar{G}(\sigma^2) \equiv 0, \sigma^2 < 0$; d. h., es kommen keine Überlichtgeschwindigkeiten vor. Dann ist nach (32) $\varrho(x^2) \equiv 0$ für $x^2 < 0$.

b) Retardierte Greensche Funktion, $G^{\text{ret}}(x) \equiv 0$ außerhalb des Nachkegels. $\tilde{\epsilon}(k_\mu^2)$ ist für $k_\mu^2 > 0$ eine reellwertige Funktion von k_μ^2 (59), (58). Für $k_\mu^2 < 0$ hat sie komplexe Werte und hängt noch vom Vorzeichen von k_μ ab; bei gleichem k_μ^2 sind dann die beiden Werte zueinander konjugiert komplex, sie liegen in verschiedenen Zweigen der analytischen Fortsetzung der für $k_\mu^2 > 0$ vorliegenden Funktion. Nur im Fall des Punktspektrums von ϱ bleibt $\tilde{\epsilon}$ immer reell (α , zeitsymm. Wellengl.), $\beta)$ muß wegen der Lorentzinvianranz bei retardierten Funktionen immer erfüllt sein.

c) Beispiele.

Zu a $\alpha \beta$). Die Forderung $\beta)$ schließt wegen $\mathbf{P}(x^2) \equiv 0, x^2 < 0$ analytische Funktionen \mathbf{P} aus und besagt ferner, daß wegen (43a) $1/\tilde{\epsilon}$ keine Singularitäten für positive k_μ^2 haben kann. Aus der Diskussion zu Formel (43a) entnehmen wir, daß $\alpha)$ nur erfüllt werden kann, wenn $\mathbf{P}(x^2)$ nur für diskret liegende (positive) x^2 -Werte von Null verschieden ist. Die Regularitätsbedingung (31) führt auf δ -Funktionen. Nehmen wir noch deren Ableitungen hinzu, so folgt aus (43a), daß die Singularitäten von $1/\tilde{\epsilon}$ Pole beliebiger Ordnung auf der negativ reellen Achse sind. Die verallgemeinerte Wellengleichung ist eine Differentialgleichung höherer Ordnung mit einem Polynom in \square als Operator.

Das einfachste Beispiel dieser Art wurde von Bopp¹³⁾ angegeben und seither oft behandelt.

$$\begin{aligned} \bar{G}(\sigma^2) &= \frac{x_0^2}{8\pi} \frac{J_1(x_0\sigma)}{x_0\sigma}, \quad \sigma^2 \geq 0, \text{ sonst } 0; \quad \tilde{\epsilon}(k_\mu^2) = (1 + k_\mu^2/x_0^2); \\ \mathbf{P}(x^2) &= \delta(x^2 - x_0^2); \quad x_0^2 > 0. \end{aligned} \quad (62a)$$

Aus (48) erkennt man die Bedeutung der Redeweise, es sei dem Photonenfeld ein Mesonenfeld überlagert⁹⁾.

Thirring¹⁴⁾ verallgemeinerte die Mesongleichung: $(\square - x_0^2)^2 \varphi = -s$. Unsere Betrachtungen bleiben anwendbar bis auf einige Formeln, die speziell für eine verallgemeinerte Elektrodynamik gelten [Folgerungen mit (28)].

$$\bar{G}(\sigma^2) = \frac{\partial}{\partial(x_0^2)} \bar{A}(\sigma^2; x_0^2); \quad \tilde{G}(k_\mu^2) = -(k_\mu^2 + x_0^2)^{-2}; \quad \varrho(x^2) = -\delta'(x^2 - x_0^2). \quad (62)$$

Eine Diskussion allgemeinerer Fälle findet sich in der Arbeit von Pais und Uhlenbeck¹⁵⁾.

Zu a α). In diese Gruppe gehört die Theorie von Peierls und McManus¹⁶⁾. Sie ist durch $\tilde{\epsilon}(k_\mu^2) = \tilde{\epsilon}(-k_\mu^2)$ charakterisiert. Es folgt mit (43) und (32) $\bar{G}(\sigma^2) = \bar{G}(-\sigma^2)$ und $\mathbf{P}(x^2) = \mathbf{P}(-x^2)$. Da Überlichtgeschwindigkeiten zugelassen sind,

¹³⁾ F. Bopp, Ann. Physik **38**, 345 (1940).

¹⁴⁾ W. Thirring, Philos. Mag. **41**, 653 (1950).

kann \mathbf{P} analytisch sein. An dem auf Seite 326¹⁰⁾ angegebenen Beispiel

$$\frac{1}{\tilde{\epsilon}(k_\mu^2)} = \frac{x_0^4}{(k_\mu^2)^2 + x_0^4}; \quad \mathbf{P}(x^2) = \frac{x_0^2}{\pi(x^4 + x_0^4)} \quad (63)$$

kann man erkennen, wie die Singularitäten der beiden Funktionen in der komplexen Ebene miteinander zusammenhängen. Es ergab sich in (62), daß zu reellen Nullstellen von $\tilde{\epsilon}$ diskrete „Massen“ gehören. Hier haben wir ein Paar konjugiert komplexer Nullstellen von $\tilde{\epsilon}$ und eine analytische Funktion \mathbf{P} .

Ein weiteres Beispiel mit einem Verzweigungspunkt:

$$\frac{1}{\tilde{\epsilon}(k_\mu^2)} = \frac{1}{\sqrt{1 + (k_\mu^2)^2}}; \quad x^2 \mathbf{P}(x^2) = \frac{-1}{\pi^2 \sqrt{1 + x^4}} \log \frac{\sqrt{1 + x^4} - x^2}{\sqrt{1 + x^4} + x^2}. \quad (64a)$$

Ebenfalls in den Rahmen der Peierls-McManusschen Theorie gehört das Beispiel von Pais und Uhlenbeck⁷⁾.

$$\tilde{\epsilon}(k_\mu^2) = \exp(\lambda^2 k_\mu^2)^2. \quad (65)$$

Zu a) Landé¹⁵⁾ legte die Greensche Funktion durch die Forderung des Reziprozitätsprinzips fest.

$$\begin{aligned} \bar{G}(\sigma^2) &= \frac{1}{4\pi} \delta(\sigma^2 - a^2) \\ \frac{1}{\tilde{\epsilon}(k_\mu^2)} &= a^2 k_\mu^2 \operatorname{Re} \frac{K_1(a \sqrt{k_\mu^2})}{a \sqrt{k_\mu^2}} = 2\pi^2 k_\mu^2 A^{(1)}(-k_\mu^2; a^2) \\ \mathbf{P}(x^2) &= \frac{a^2}{2} \operatorname{Re} \frac{H_1^{(1)}(a x)}{a x} = \begin{cases} \frac{a}{2x} J_1(a x) & x^2 \geq 0 \\ 0 & x^2 < 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (66)$$

In der zitierten Arbeit hat Lehmann⁸⁾ ein Beispiel dieses Typs angegeben. Es lautet mit unsern Bezeichnungen:

$$\begin{aligned} \bar{G}(\sigma^2) &= (1/4\pi a^2) \exp(-\sigma^2/a^2) \text{ für } \sigma^2 \geq 0, \text{ sonst } 0 \\ 1/\tilde{\epsilon}(k_\mu^2) &= 1 + \frac{a^2 k_\mu^2}{4} \exp\left(\frac{a^2 k_\mu^2}{4}\right) l_i \left[\exp\left(-\frac{a^2 k_\mu^2}{4}\right) \right] \\ \mathbf{P}(x^2) &= \frac{a^2}{4} \cdot \exp(-a^2 x^2/4). \end{aligned} \quad (67)$$

Ausgehend von der Ersetzung der Bewegungsgleichung durch eine Differenzengleichung kam der Verfasser in seiner Dissertation zu der Greenschen Funktion

$$\bar{G}(\sigma^2) = \frac{1}{6\pi a^2} \begin{cases} \log 2 & 0 \leq \sigma \leq \alpha \\ \log 2 \alpha/\sigma & \alpha \leq \sigma \leq 2\alpha \\ 0 & \sigma > 2\alpha; \sigma^2 < 0. \end{cases} \quad (68)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tilde{\epsilon}(k_\mu^2)} &= \operatorname{Re} \frac{4\pi}{3\alpha^2 k_\mu^2} \left[\frac{\log 4}{\pi} + i H_0^{(1)}(2\alpha \sqrt{-k_\mu^2}) - i H_0^{(1)}(\alpha \sqrt{-k_\mu^2}) \right. \\ &\quad \left. - \alpha \sqrt{k_\mu^2} H_1^{(1)}(2\alpha \sqrt{-k_\mu^2}) + \frac{\alpha \sqrt{k_\mu^2}}{2} H_1^{(1)}(\alpha \sqrt{-k_\mu^2}) \right]. \end{aligned}$$

¹⁵⁾ A. Landé, Physic. Rev. 76, 1176 und 77, 814 (1950).

Zu $b \alpha$). Die bisher genannten Beispiele lassen sich, falls β erfüllt ist, auf den retardierten Fall übertragen. Darüber hinaus seien die Arbeiten von Bhabha¹⁶⁾ und Prakash¹⁷⁾ genannt. Bhabha änderte wie Thirring die Mesongleichung ab, während Prakash ausführlich den allgemeinen Fall beliebig vieler gleicher oder verschiedener Nullstellen von $\tilde{\epsilon}$ behandelt, wobei er sich auf positive Massen und retardierte Lösungen beschränkt.

Das Riesz-Frembergsche¹⁸⁾ Verfahren der analytischen Fortsetzung, das in der Beseitigung der Divergenzen der klassischen Elektrodynamik mit dem λ -Grenzprozeß gleichwertig ist, kann ebenfalls hier angeführt werden. Bei der Berechnung der Potentiale wird zunächst die Integration mit einer abgeänderten Greenschen Funktion durchgeführt, die einen Parameter α enthält. Analytische Fortsetzung des Ergebnisses nach $\alpha = 0$ stellt für Punkte außerhalb der Weltlinie der Elektronen die Liénard-Wiechertschen Potentiale her und führt andererseits auf den Weltlinien zu endlichen Werten für alle Feldgrößen. Die abgeänderte Greensche Funktion heißt:

$$G^{\text{ret}}(\sigma^2) = \frac{\sigma^{\alpha-2}}{\pi 2^{\alpha+1} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2} + 1\right) \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \quad \text{im Nachkegel, sonst 0} \quad (69)$$

$$\tilde{\epsilon}(k_\mu^2) = (k_\mu^2)^{\alpha/2}; \quad k_\mu^2 > 0. \quad \text{Für } k_\mu^2 < 0 \text{ vgl. b).}$$

d) „Retardierte“ Lösungen im Sinne von Feynman⁹⁾ und McManus¹⁰⁾. In diesen Arbeiten und auch in dem zitierten Beispiel von Pais und Uhlenbeck⁷⁾ wird die symmetrische Lösung so ergänzt, daß die schon im Maxwellschen Fall vorhandenen Pole $k_\mu^2 = 0$ wie in der retardierten Lösung umgangen werden. Das Ergebnis ist nicht in unserem Sinne retardiert. Für eine nähere Diskussion vgl. die genannten Arbeiten und H. Lehmann³⁾.

11. Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird die in der Literatur zumeist an Beispielen entwickelte Theorie der verallgemeinerten Wellengleichung zusammenfassend dargestellt.

Abschließend möchte ich Herrn Professor Möglich für sein Interesse an der Arbeit herzlich danken.

¹⁶⁾ H. J. Bhabha, Physic. Rev. **77**, 665 (1950).

¹⁷⁾ S. Prakash, Proc. Ind. Acad. Sci. (A) **31**, 240 (1950).

¹⁸⁾ N. E. Fremberg, Proc. Roy. Soc. London (A) **188**, 18 (1946).

Berlin, Institut für theoretische Physik der Humboldt-Universität.

(Bei der Redaktion eingegangen am 10. Februar 1951.)

Ein Beispiel zur klassischen Feldmechanik

Von G. Höhler

Inhaltsübersicht

F. Möglich und R. Rompe haben vorgeschlagen, die nichtrelativistische Bewegungsgleichung eines Elektrons durch eine Differenzengleichung zu ersetzen, um das Vorhandensein eines kleinsten Zeitintervalls zu berücksichtigen. Wir zeigen, daß diese Bewegungsgleichung auch im Rahmen der Boppsschen Feldmechanik auftreten kann und diskutieren den damit festgelegten Spezialfall.

1. Die Bewegungsgleichung von Möglich und Rompe

Es ist vor mehr als 10 Jahren klar geworden, daß in der Physik der Elementarteilchen eine neue Naturkonstante von der Dimension einer Länge eine entscheidende Rolle spielt¹⁾. Division durch die Lichtgeschwindigkeit führt auf eine „Elementarzeit“. Man hat des öfteren vermutet, daß die Bedeutung dieser Konstanten darin liegt, daß sie angeben, bei welchen Dimensionen von den gewohnten Vorstellungen abweichende Eigenschaften der Raum-Zeit auftreten. Möglich und Rompe²⁾ haben versucht, der Existenz einer Elementarzeit in der Bewegungsgleichung eines Elektrons dadurch Rechnung zu tragen, daß sie den zeitlichen Differentialquotienten durch einen Differenzenquotienten mit der Elementarzeit als Schrittweite ersetzen. Sie betrachten daher die (nichtrelativistische) Bewegungsgleichung:

$$\ddot{\mathbf{r}} = m \cdot D^2 \mathbf{r} = \frac{m}{\tau^2} [\mathbf{r}(t) - 2\mathbf{r}(t-\tau) + \mathbf{r}(t-2\tau)], \quad \tau > 0, \quad (1)$$

weisen aber darauf hin, daß wegen der Auszeichnung der Zeit vor dem Raum ihre Untersuchungen nur einen vorläufigen Charakter tragen. Es ist wesentlich, daß das Vorzeichen von τ in der angegebenen Weise gewählt wird³⁾. Der Differenzenquotient läßt sich durch eine Reihe darstellen, indem man die Taylorentwicklung von $\mathbf{r}(t-\tau)$ und $\mathbf{r}(t-2\tau)$ einsetzt bzw. den Verschiebungsooperator einführt:

$$\ddot{\mathbf{r}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+2} - 2}{(n+2)!} (-\tau)^n \left(\frac{d}{dt} \right)^n m \ddot{\mathbf{r}}. \quad (2)$$

Möglich und Rompe behalten von dieser Reihe zunächst nur die beiden ersten Terme bei und vergleichen die so erhaltene Bewegungsgleichung mit der von

¹⁾ W. Heisenberg, Ann. Physik **32**, 20 (1938).

²⁾ F. Möglich u. R. Rompe, Z. Physik **113**, 740 (1939).

³⁾ Negatives τ führt zu einem falschen Vorzeichen für die Strahlungsdämpfung. Da ihr erstes Glied strukturunabhängig ist, kann eine solche Bewegungsgleichung in der Boppsschen Theorie nicht auftreten. Formal äußert sich das im Verhalten der rechten Seite von (9) für große ε .

Dirac⁴⁾ (nichtrelativistische Näherung). Es ist bemerkenswert und für alles Folgende entscheidend, daß die Bewegungsgleichungen übereinstimmen, wenn man für die Elementarzeit einen Wert einsetzt, der auch aus anderweitigen Überlegungen heraus als plausibel erscheint:

$$\tau = \frac{2 e^3}{3 m c^3} \approx 6 \cdot 10^{-24} \text{ sec.} \quad (3)$$

Aus der Tatsache, daß der Übergang von der Differentialgleichung zur Differenzengleichung zu dem richtigen Dämpfungsglied führt, schließen sie auf eine tiefere Verknüpfung zwischen dem elektromagnetischen Feld und der Raum-Zeit-Eigenschaft, nicht vollständig ausmeßbar zu sein.

Im folgenden soll zunächst gezeigt werden, daß man auch auf die Bewegungsgleichungen (1) geführt wird, wenn man die üblichen Raum-Zeit-Vorstellungen beibehält und dafür zu einer bestimmten Verallgemeinerung der Elektrodynamik übergeht, die in den Rahmen der Bopp'schen linearen Theorie des Elektrons gehört. Die neue Naturkonstante ist dann ein Maß dafür, in welchem raumzeitlichen Abstand von dem punktförmig gedachten Elektron die Abweichungen von der Maxwell'schen Theorie merklich werden.

2. Die Bopp'sche Theorie des Elektrons

Bopp⁵⁾ ersetzt die Wellengleichung der Maxwell'schen Theorie durch eine lineare Integrodifferentialgleichung:

$$\square(\varepsilon, \varphi_\mu) \equiv \square \int \varepsilon(x - x') \varphi_\mu(x') (dx') = -s_\mu(x). \quad (4)$$

$\varepsilon(x)$ charakterisiert die verallgemeinerte Theorie, x ist der Vierervektor (x_0, x_1, x_2, x_3) , (dx) das Volumenelement im Minkowski-Raum $dx_0 dx_1 dx_2 dx_3$, die Lichtgeschwindigkeit ist gleich Eins gesetzt. $s_\mu(x)$ ist die durch die Weltlinien der (punktformigen) Elektronen bestimmte Stromdichte. Mit Hilfe der durch

$$\square(\varepsilon, G^{\text{ret}}) = -\delta(x_0) \delta(x_1) \delta(x_2) \delta(x_3); \quad G^{\text{ret}}(x) \equiv 0, \quad x_0 < 0 \quad (5)$$

definierten retardierten Greenschen Funktion läßt sich (4) umkehren:

$$\varphi_\mu(x) = (G^{\text{ret}}, s_\mu). \quad (6)$$

Damit ist das Feld einer beliebigen Stromverteilung angegeben. Das andere Problem einer klassischen Elektrodynamik ist die Frage nach der Bewegung einer Ladung im vorgegebenen Feld. Sie läßt sich in dieser Theorie nicht aus den Feldgleichungen heraus beantworten, so daß die Einführung eines „Bewegungsprinzips“ notwendig ist. Die Forderung, daß die Singularitäten nicht am Energieumsatz beteiligt seien, führt dazu, daß die mittlere Lorentzkraftdichte in einem beliebig kleinen Volumen um die Singularität verschwinden muß. Man zerlegt die Lorentzkraft additiv in eine äußere Kraft und die Rückwirkung des Eigenfeldes, geht bei letzterer zur nichtrelativistischen Näherung über und entwickelt nach der Retardierung. Dann folgt als Bewegungsgleichung (\mathfrak{R} = äußere Kraft):

$$\mathfrak{R} = M \left(\frac{d}{dt} \right) m \ddot{x}; \quad (7)$$

$$M(p) = \frac{4 \pi e^2}{m} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-p)^n}{(n+2)!} \int_0^{\infty} \sigma^n G^{\text{ret}}(\sigma^2) d\sigma.$$

⁴⁾ P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. London A **167**, 148 (1938).

⁵⁾ F. Bopp, Ann. Physik **42**, 573 (1943); Z. Naturforsch. **1**, 53 (1946).

3. Untersuchung des Spezialfalles

Diese Bewegungsgleichung enthält als Spezialfall auch unsere Differenzengleichung (1). Man braucht nur

$$M(p) = \frac{4}{\tau^2 p^2} e^{-\tau p} \sinh \frac{\tau p}{2} \quad (8)$$

zu wählen. Aus $M(p)$ kann man mit (7) zunächst die Laplacesche Unterfunktion von G^{ret} ausrechnen:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-s\sigma} G^{\text{ret}}(\sigma^2) d\sigma &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-s)^n}{n!} \int_0^{\infty} \sigma^n G^{\text{ret}}(\sigma^2) d\sigma \\ &= \frac{m}{2\pi e^s \tau} \cdot \frac{1}{s} [-E i(-2\tau s) + E i(-\tau s) + \log 2] \end{aligned} \quad (9)$$

und schließlich $G^{\text{ret}}(\sigma^2)$

$$G^{\text{ret}}(\sigma^2) = \frac{m}{2\pi e^s \tau} \begin{cases} \log 2 & 0 \leq \sigma \leq \tau \\ \log \frac{2\tau}{\sigma} & \tau \leq \sigma \leq 2\tau \\ 0 & 2\tau \leq \sigma; \sigma^2 < 0. \end{cases} \quad (10)$$

Der Schluß von $M(p)$ auf G^{ret} ist nicht eindeutig⁸⁾, jedoch ist unser G^{ret} offensichtlich ausgezeichnet.

Um Näheres über unsern Spezialfall zu erfahren, ermitteln wir nun ausgehend von G^{ret} die weiteren charakteristischen Funktionen ($\zeta = c\tau \sqrt{k_\mu^2}$, $k_\mu^2 > 0$)

$$\frac{1}{\zeta} (k_\mu^2) = \frac{4\pi}{3\zeta^2} \left[\frac{\log 4}{\pi} + i H_0^{(1)}(2i\zeta) - i H_0^{(1)}(i\zeta) - \zeta H_1^{(1)}(2i\zeta) + \frac{\zeta}{2} H_1^{(1)}(i\zeta) \right]. \quad (11)$$

Für $k_\mu^2 < 0$ vgl.⁹⁾ Abschnitt 10b. Die verallgemeinerte Wellengleichung ist nicht mehr zeitsymmetrisch. Dementsprechend ist das Massenspektrum ($\chi = \tau \kappa$, $\kappa^2 > 0$)

$$P(\kappa^2) = \frac{2}{3\chi^2 \kappa^2} [2J_0(\chi) - 2J_0(2\chi) + \chi J_1(\chi) - 2\chi J_1(2\chi)] \quad (12)$$

nicht diskret. Die Laplacesche Oberfunktion des statischen Potentials, aus der man nach Bopp⁸⁾ in einfacher Weise ablesen kann, ob die Photonenbedingung erfüllt ist, erhalten wir aus $P(\kappa^2)$ oder aus G^{ret}

$$\hat{P}(s) = 2\pi \int_0^{\infty} J_0(\sigma s/\tau) G^{\text{ret}}(\sigma^2) d\sigma^2 = \frac{4}{3} \frac{J_0(s) - J_0(2s)}{s^2}. \quad (13)$$

In unserem Falle treten insbesondere auch keine Quanten negativer Energie auf.

Die Funktion G^{ret} war ursprünglich als Verallgemeinerung der im Maxwellischen Falle vorliegenden D^{ret} -Funktion eingeführt worden, so daß es nahe liegt, eine Normierung

$$\int_0^{+\infty} G^{\text{ret}}(\sigma^2) d\sigma^2 = \frac{1}{2\pi} \quad (14)$$

zu fordern, deren physikalische Bedeutung durch Betrachtung des statischen Potentials einer Punktladung

$$\varphi_{\text{st}}(r) = 2\pi e \int_0^{\infty} \frac{G^{\text{ret}}(\sigma^2)}{\sqrt{\sigma^2 + r^2}} d\sigma^2 \quad (15)$$

⁸⁾ G. Höhler, Ann. Physik, 9, 77 (1951).

ersichtlich wird: Übergang in das Coulombsche Potential für große Abstände. Die Erfüllung dieser für eine verallgemeinerte Elektrodynamik notwendigen Bedingung führt zu einer Festlegung des einzigen Parameters τ . Der so erhaltene Wert stimmt genau mit dem in (3) angegebenen überein. Also: wenn eine Differenzengleichung (1) Bewegungsgleichung im Rahmen der Boppschen Theorie sein soll, so ist das Intervall notwendig gleich der aus andern Überlegungen als plausibel erscheinenden Elementarzeit.

Das statische Potential einer Punktladung läßt sich explizit angeben: ($\rho = r/\tau$)

$$\varphi_{\text{st}}(\rho) = \frac{4e}{3\tau} \rho \left[-\log 2 + \sqrt{1 + 4/\rho^2} - \sqrt{1 + 1/\rho^2} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \log \frac{(\sqrt{1 + 4/\rho^2} - 1)(\sqrt{1 + 1/\rho^2} + 1)}{(\sqrt{1 + 4/\rho^2} + 1)(\sqrt{1 + 1/\rho^2} - 1)} \right], \quad (16)$$

insbesondere ist $\varphi_{\text{st}}(0)$ endlich und gleich $2m/e$. Im Abstand von einigen Elementarlängen ist das Coulomb-Potential schon eine gute Näherung.

Die Erfüllung der Endlichkeitsbedingung⁵⁾ haben wir bei unserm Ansatz vorausgesetzt. Die Energie des Feldes einer ruhenden Punktladung ist mc^2 . Hingegen ist die Strahlungsbedingung⁶⁾, wie man aus (2) unmittelbar erkennt, nicht erfüllt. Da diese jedoch willkürlich ist, ergeben sich keine Schwierigkeiten. Der erste Term der Strahlungskraft stimmt wegen der Coulomb-Bedingung und (7) immer mit dem Lorentz-Diracschen Wert überein.

4. Diskussion der Bewegungsgleichung

In der Boppschen Theorie sind die relativistische Bewegungsgleichung und auch ihre nichtrelativistische Näherung Integralgleichungen, die im kräftefreien Fall als spezielle Lösung die mit konstanter Geschwindigkeit haben. Jedoch gibt es daneben im allgemeinen noch weitere Lösungen, so daß die üblichen Anfangsbedingungen zur eindeutigen Festlegung nicht mehr ausreichen.

Bei Dirac⁴⁾, dessen klassische Theorie des Elektrons als spezieller Fall der Boppschen Theorie dargestellt werden kann, zeigen diese Lösungen ein „nicht-physikalisches“ Verhalten, indem sie zu einer exponentiellen Selbstbeschleunigung des Teilchens führen. Er versuchte durch eine universelle Endbedingung für die Beschleunigung eine Beschränkung auf vernünftige Lösungen zu erreichen. Aber sein Verfahren ist nicht befriedigend, wie Wessel⁷⁾, Bopp⁵⁾ und Eliezer⁸⁾ an Beispielen mit äußeren Kräften zeigen konnten. Manchmal existieren nur Lösungen mit nichtphysikalischen Eigenschaften.

Bopp⁵⁾ behandelt das Problem von einer andern Seite, indem er die Frage aufwirft, wie man verallgemeinerte Theorien charakterisieren kann, bei denen im kräftefreien Fall ein exponentielles Anwachsen der Beschleunigung gar nicht vorkommt. Einige Zeit nach Aufhören einer Störung soll das Elektron in den Zustand konstanter Geschwindigkeit zurückkehren. Die Beantwortung gelingt nur für die nichtrelativistische Näherung der Bewegungsgleichung: $M(p)$ darf in der komplexen Ebene keine Nullstellen oder Verzweigungspunkte mit positivem Realteil haben (Bedingung der Massenstabilität). Die in der zitierten Arbeit an-

⁷⁾ W. Wessel, Z. Physik 110, 625 (1938).

⁸⁾ C. J. Eliezer, Rev. mod. Physics 19, 147 (1947).

gegebenen Methoden zur Untersuchung der Bewegungsgleichung führen bei unserem Beispiel zu mathematischen Schwierigkeiten, die daher röhren, daß unser Teilchen einer Kraft vom Typ einer Deltafunktion trägeheitslos folgt. Wir können aber die allgemeinste Lösung der kräftefreien, nichtrelativistischen Bewegungsgleichung (1) leicht anschreiben und direkt diskutieren.

$$x_i(t) = a_i(t) + t \cdot b_i(t). \quad (17)$$

Dabei sind $a_i(t)$, $b_i(t)$ beliebige Funktionen mit der Periode τ . Die Bewegungsgleichung verknüpft nicht mehr benachbarte Zeitpunkte, sondern vielmehr drei der elementaren Intervalle. Daher kann die Bewegung für zwei zusammenhängende Intervalle beliebig vorgegeben werden. Zu jedem andern Zeitpunkt ist sie dann eindeutig bestimmt. Unser Beispiel zeigt besonders übersichtlich die Feld-Fernwirkung in der Boppischen Theorie (vgl. G^{ret}); der allgemeine Fall der Integralgleichung liegt viel komplizierter. Man erkennt auch, daß die Bezeichnung der Bewegungsgleichung als Differentialgleichung unendlich hoher Ordnung, die zu der von Hönl⁹⁾ diskutierten Schwierigkeit der unendlich vielen Anfangsbedingungen geführt hat, nicht zweckmäßig ist. Die Verhältnisse liegen bei Integral- bzw. Differenzengleichungen in vieler Hinsicht, z. B. bezüglich des Bereiches der betrachteten Funktionen, anders als bei Differentialgleichungen endlicher Ordnung. Die neuen Freiheitsgrade, die etwa in den Fourier-Koeffizienten der beiden willkürlichen periodischen Funktionen in (17) zum Ausdruck kommen, sind ein Ersatz für die Freiheitsgrade des Feldes, die wir eliminiert haben.

Wir entnehmen weiter aus (17), daß keine exponentiellen Instabilitäten auftreten, aber die Schwingungen schaukeln sich linear mit t auf. Diese Tatsache spricht noch nicht gegen die Brauchbarkeit unseres Ansatzes. Denn wenn die Amplituden in die Größenordnung des klassischen Elektronenradius kommen, wird die relativistische Bewegungsgleichung zuständig, deren Lösungen nicht bekannt sind. Hönl⁹⁾ hat in dem verwandten Fall des kräftefreien Pol-Dipol-Teilchens bei Berücksichtigung der üblichen Strahlungskraft¹⁰⁾ ein instabiles Verhalten gefunden und versucht, hierin eine klassische Beschreibung des Mesonzerfalls zu sehen.

Abschließend wollen wir noch zwei Arbeiten von Eliezer¹¹⁾ und Bohm und Weinstein¹²⁾ nennen, die sich mit der Bewegung eines räumlich ausgedehnten Elektrons unter alleiniger Wirkung des retardierten Eigenfeldes beschäftigen. Beide kommen zu dem Ergebnis, daß das freie Elektron Schwingungen ausführen kann, deren Frequenzen etwa mit der unseren übereinstimmen. Eliezer findet als nichtrelativistische Bewegungsgleichung eines Elektrons mit Oberflächenladung auch eine Differenzengleichung, jedoch tritt bei ihm der erste Differenzenquotient der Geschwindigkeit auf. Energie wird nicht abgestrahlt. Eine Verbindung zu unseren Untersuchungen kann hergestellt werden, indem man (4) auf die Form

$$\square \varphi_\mu = -(\varepsilon^{-1}, s_\mu) = -\bar{s}_\mu \quad (18)$$

⁹⁾ H. Hönl, Z. Naturforschg. **2a**, 537 (1947).

¹⁰⁾ Dies entspricht der Theorie von McManus¹³⁾. In der Boppischen Theorie ist die Strahlungskraft im allgemeinen von der üblichen verschieden und die Strahlungsbedingung in⁵⁾ stellt eine Forderung an ε dar.

¹¹⁾ C. J. Eliezer, Proc. Roy. Soc. London A **194**, 543 (1948); Proc. Camb. Phil. Soc. **46**, 199 (1950).

¹²⁾ D. Bohm u. M. Weinstein, Physic. Rev. **74**, 1789 (1948).

bringt. Bei geeignetem ε wird dann aus dem singulären Strom s_μ des Punkt-elektrons eine kontinuierliche Ladungsverteilung \bar{s}_μ , die einem räumlich ausgedehnten Elektron entspricht [Bopp¹³), McManus¹³]). Wenn man die Retardierung statt auf s_μ (Bopp) auf \bar{s}_μ (McManus) bezieht¹⁴), entsprechen die Berechnungen des Eigenfeldes einander genau, jedoch sind die Bewegungsprinzipien verschieden¹⁵).

Ich danke Herrn Professor Möglich für freundliche Diskussionen und für sein Interesse an der Arbeit.

¹³⁾ H. McManus, Proc. Roy. Soc. London A **195**, 323 (1948).

¹⁴⁾ H. Lehmann, Ann. Physik **8**, 109 (1950).

¹⁵⁾ In der Bopp'schen Theorie gehört zu der genannten Bewegungsgleichung von Eliezer die Greensche Funktion

$$G^{\text{ret}}(\sigma^2) = \frac{m}{4\pi e^2 \tau} [1 - \log(\sigma/\tau)] \text{ für } 0 < \sigma < \tau, \text{ sonst Null.}$$

(Die Forderung nach dem Endlichbleiben von G^{ret} ist hinreichend, aber nicht notwendig für die Endlichkeit der Selbstenergie.)

Berlin, Institut für theoretische Physik der Humboldt-Universität.

(Bei der Redaktion eingegangen am 28. März 1951.)

Zur

durch
seit
von
elek
aus
durch
der
es v
kon
der
met
stim

an
que
ech
dan
kop
wär
ky
Pf
St

son

For

Zur Frage der Widerstandsschichtung in Kupferoxydul-Gleichrichtern. I

Untersuchungen an Massivplatten mit „sperrfreier“ Kontaktierung¹⁾

(Mitteilung der Dienststelle Pretzfeld der Siemens-Schuckertwerke)

Von Frank Rose

(Mit 14 Abbildungen)

Inhaltsübersicht

Es sind an Cu_2O -Gleichrichtern Scheinwiderstandsmessungen bis 100 KHz durchgeführt worden, um über die Leitfähigkeitsschichtung an der Mutterkupferseite dieser Gleichrichter neue Aufschlüsse zu erhalten. Um hierbei die Wirkungen von etwaigen Leitfähigkeitsschichtungen im Innern des Cu_2O und an der Gegen-elektrode beurteilen zu können, sind die Messungen auf massive Cu_2O -Proben ausgedehnt und bei verschiedenen Temperaturen zwischen 195° K und 303° K durchgeführt worden. Die Wiedergabe dieser Ergebnisse bildet den Gegenstand der vorliegenden ersten Veröffentlichung über die gesamten Untersuchungen; es wird hierbei ein Einblick in das Auftreten von Randwiderständen an der Silberkontaktierung, die Leitfähigkeit des neutralen Cu_2O und die Aktivierungsenergie der Störstellen gewonnen. Eine von K. Lehoverc vorgeschlagene Auswertungsmethode, aus dem Scheinwiderstand die örtliche Leitfähigkeitsverteilung zu bestimmen, wird beschrieben. Zwei weitere Veröffentlichungen sollen folgen.

Von G. Pfotzer²⁾ wurde vor einiger Zeit über Scheinwiderstandsmessungen an Cu_2O -Gleichrichtern berichtet und hierbei gezeigt, daß diese bei hohen Frequenzen nicht dem von Schottky und Deutschemann³⁾ angegebenen Ersatzschema für Erschöpfungsgrandschichten entsprachen. Von Schottky wurde darauf hingewiesen⁴⁾, daß diese Abweichungen u. U. durch das Auftreten unvollkommen dissoziierter Störstellen, d. h. durch Reserve-Randschichten zu erklären wären, was auch Pfotzer bei der Diskussion seiner Messungen erwähnt⁵⁾. Schottky glaubte sogar, daß unter dieser Annahme gewisse Besonderheiten des von Pfotzer beobachteten Scheinwiderstandsverlaufs auf das Vorkommen von zwei Störstellenarten gleichzeitig hindeuten könnten.

Da die Frage des Zutreffens einer solchen Deutung nicht nur von technischem, sondern auch vor allem von physikalischem Interesse ist, erschien es angebracht,

¹⁾ Eine Zusammenfassung von Teil I befindet sich am Schluß der Arbeit.

²⁾ G. Pfotzer, Z. Naturforsch. 4a, 691 (1949).

³⁾ W. Schottky u. W. Deutschemann, Physik. Z. 30, 839 (1929).

⁴⁾ W. Schottky: „Zur Theorie der Randschichtgleichrichter“ (Darstellung und Fortführung nach dem Stand von 1947 (unveröffentlicht)).

⁵⁾ G. Pfotzer, l. c., insbesondere S. 705.

Scheinwiderstandsbestimmungen im besonderen Hinblick und unter spezieller Ausrichtung auf die physikalische Deutung zu wiederholen.

Aus diesem Grunde wurden von uns Scheinwiderstandsmessungen an Cu_2O -Gleichrichterscheiben verschiedener Herstellungsform bei unterschiedlichen Temperaturen und bei Frequenzen bis zu 100 KHz vorgenommen.

Da es sich zeigte, daß die Kontaktierung der Gegenelektrode von beträchtlichem Einfluß auf den Scheinwiderstandsverlauf ist, wurden die Messungen auf Scheiben aus massivem Cu_2O ohne angrenzendes Mutterkupfer ausgedehnt, um bei Fehlen der eigentlichen Randschicht die Wirkung der Kontaktierung besser überblicken zu können. Dies lieferte gleichzeitig einen Einblick in die Leitfähigkeiten und Temperaturkoeffizienten des massiven Cu_2O bei den einzelnen verwendeten Herstellungsmethoden, die zu einem Vergleich mit den entsprechenden Werten bei Gleichrichterzellen herangezogen werden können.

Für die Auswertung der Scheinwiderstandsbestimmungen wurde eine von Pfotzer abweichende, auf K. Lehovec zurückzuführende Methode der Leitfähigkeitsanalyse verwendet, die auch ursprünglich von Schottky für den Deutungsversuch benutzt wurde⁶⁾.

Bei dem großen Umfang des zu behandelnden Stoffes erschien es angebracht, eine Aufteilung vorzunehmen, und zwar in:

- I. Untersuchungen an Massivplatten mit „sperrfreier“ Kontaktierung.
- II. Untersuchungen an Gleichrichterscheiben.
- III. Diskussion der Meßergebnisse.

Im vorliegenden Teil I wird außerdem eine kurze Schilderung der Apparatur und der verwendeten Leitfähigkeitsanalyse gebracht werden; ferner ein Bild der schon von Pfotzer gemessenen Abweichungen des Scheinwiderstandes vom Halbkreisverlauf in der komplexen Ebene bei einer Gleichrichterzelle und eine Diskussion des etwaigen Zusammenhangs mit dem „Bahn“-Widerstand der an die Randschicht anschließenden neutralen Cu_2O -Schicht.

§ 1. Einleitung

Die schon von G. Pfotzer²⁾ gezeigte Erscheinung, daß Cu_2O -Gleichrichter bei Zimmertemperatur bereits oberhalb 10 KHz in ihrem in der komplexen Scheinwiderstandsebene aufgetragenen „Scheinwiderstandsdiagramm“ Abweichungen von dem Ersatzschema aufweisen, welches nach Schottky-Deutschmann für niedere Frequenzen gültig ist (Abweichungen vom Halbkreis in Abb. 1), läßt zunächst die Frage offen, ob nicht oberhalb 10 KHz das Neutralgebiet schon kapazitiv überbrückt wird. In dem genannten Ersatzschema wird ja die Parallelschaltung von R_p und C_p dem Widerstand und der Kapazität der Sperrschiicht zugeordnet, R_b dem Bahnwiderstand. Diesem Bahnwiderstand liegt nun ungefähr die Elektrodenkapazität parallel, die bei niederen Frequenzen vernachlässigt werden kann, bei genügend hohen jedoch berücksichtigt werden muß.

Eine kurze Rechnung zeigt, daß dann, wenn über die ganze Breite der nicht randverarmten Halbleiterschicht gleiche spezifische Leitfähigkeit angenommen wird, für die kapazitive Überbrückung der neutralen Halbleiterschicht viel höhere Frequenzen erforderlich sind, als in Abb. 1 angewendet wurden.

⁶⁾ W. Schottky, I. c.

Als Bahnkapazität errechnet sich mit einer Dielektrizitätskonstante $\epsilon = 12$, einer Fläche $F = 11,5 \text{ cm}^2$ und einer Dicke von etwa 70μ der Cu_2O -Schicht

$$C_{\text{Bahn}} = 1,74 \cdot 10^{-9} Fd.$$

Setzt man als Bahnwiderstand die Entfernung des linken Fußpunktes des Halbkreises vom O-Punkt an (R_b), so ergibt sich

$$R_{\text{Bahn}} = R_b = 3,5 \Omega.$$

Die Scheitelfrequenz einer aus diesem Bahnwiderstand und dieser Bahnkapazität bestehenden Parallelschaltung, für die sich ebenfalls ein Halbkreisdiagramm ergeben würde, beträgt also

$$f = \frac{1}{2 \pi R_{\text{Bahn}} \cdot C_{\text{Bahn}}} \approx 25 \text{ MHZ.}$$

Erst bei dieser Frequenz wäre R_{Bahn} zur Hälfte überbrückt, während aus Abb. 1 zu ersehen ist, daß dies schon bei 100 KHz der Fall ist.

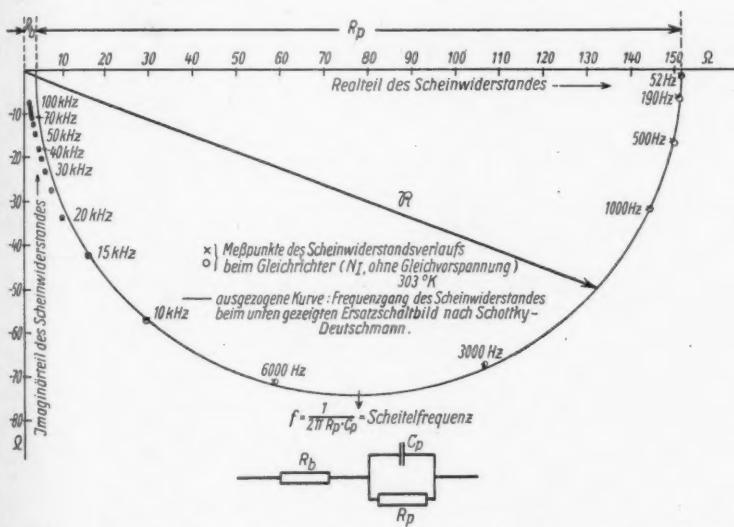


Abb. 1. Frequenzgang des Scheinwiderstandes bei einem Ersatzschaltbild nach Schottky-Deutschmann und bei einem Cu_2O -Gleichrichter aus CCC-Kupfer

Es muß also entweder in dem Neutralgebiet eine starke Leitfähigkeitsschichtung vorhanden sein oder aber die Randschicht selbst wird nicht durch eine einfache Parallelschaltung von Kapazität und Widerstand richtig wiedergegeben.

Ein eindeutiges Zeichen, daß auch außerhalb der am Mutterkupfer vorhandenen Randschicht noch eine Leitfähigkeitsschichtung auftreten kann, ergab sich bei dem Vergleich von Messungen bei Tieftemperaturen an einer Gleichrichterscheibe, die einmal in einem gealterten Anfangszustand untersucht wurde, in dem die Silberschicht auf die durch Ätzen von ihrer CuO-Haut befreite Gleichrichter-

scheibe thermisch aufgedampft war und dann sofort nach Abpolieren⁷⁾ und sorgfältiger Neukontakteierung. Die Anwendung der in § 3 geschilderten Leitfähigkeitsanalyse auf diese Messungen zeigte nämlich, daß durch Alterung des gewöhnlich als nichtsperrend angenommenen Kontaktes an der Gegenelektrode schmal-

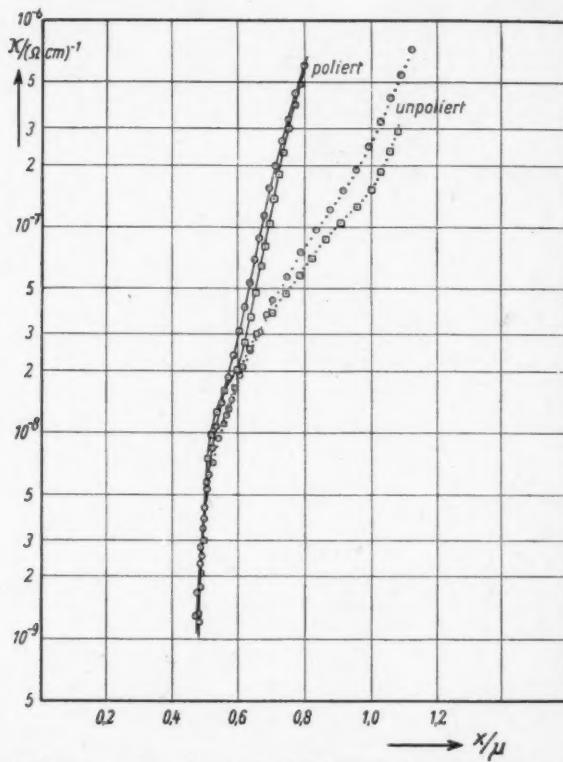


Abb. 2. Leitfähigkeitsanalyse einer Gleichrichterscheibe N VI vor und nach den Polieren bei 195°K und bei 0,1 V Sperrspannung

- □ — □ — □ — **□ □ - Kurve poliert**
- □ — □ — □ — **□ □ - Kurve unpoliert**
- ○ — ○ — ○ — **○ ○ - Kurve poliert**
- ○ — ○ — ○ — **○ ○ - Kurve unpoliert**

hochohmige Schichten hervorgerufen werden können, die durch Abpolieren und sorgfältige Neukontaktierung weitgehend beseitigt werden (Abb. 2 zur Erklärung der dargestellten Kurven vgl. die späteren Ausführungen, vorläufig beachte man nur, daß oberhalb der Entfernung $x = 0,6 \mu$ von der Cu-Elektrode bei den geal-

7) Die Silberkontakteierung und die durch den Ätzvorgang beeinflußte Oberfläche des Cu₂O wurde durch möglichst glattes Abschleifen entfernt.

terten Scheiben der Leitfähigkeitsanstieg verlangsamt erscheint, so daß zusätzlich hochohmige Schichten der Leitfähigkeit 10^{-8} bis $10^{-6} (\Omega \text{ cm})^{-1}$ anzunehmen sind, die als Randwiderstände, an der äußeren Cu_2O -Elektrode zu deuten wären). Um festzustellen, welche Leitfähigkeitsschichtung bei der besten von uns erreichten Kontaktierung (Abpolieren und Aufdampfen von Silber im Vakuum) noch vorhanden ist, wurden Scheinwiderstandsmessungen an massiven Cu_2O -Platten ausgeführt. Über sie soll hier berichtet werden. Zuvor jedoch möge auf die Meßapparatur und die oben erwähnte Frequenzanalyse eingegangen werden.

§ 2. Meßapparatur

Die Messungen wurden in einem Scheinwiderstandsmeßplatz durchgeführt, der nach dem Prinzip der Wechselstrommeßbrücke arbeitete. Die Schaltung ist, rein schematisch, in Abb. 3 gezeigt. Zum Abgleich wurde eine Parallelschaltung von Regelkapazität C_A und Regelwiderstand R_A verwendet. Der Frequenzbereich erstreckte sich nach oben, in erster Linie wegen Beschaffungsschwierigkeiten von geeigneten Abgleichskapazitäten für höhere Frequenzen, nur bis 100 KHz. Nach unten wurden 40 Hz erreicht⁸⁾.

Da in der Brücke auch Trockengleichrichter gemessen werden sollten, sind vor allem folgende Schwierigkeiten zu berücksichtigen:

Will man die Gleichrichter nach dem Versuchsplan durchmessen, so muß während der Scheinwiderstandsbestimmung, die mit einer geringen Wechselspannung zu erfolgen hat, gleichzeitig noch eine Gleichspannung angelegt werden können, was eine gewisse Komplikation zur Folge hat. Größere Schwierigkeiten bereitet es aber, daß die erwähnte Meßwechselspannung bei der Durchmessung von Gleichrichtern sehr klein sein muß. Dies ist notwendig, weil die Gleichrichter ja eine Spannungsabhängigkeit ihres Widerstandes und ihrer Kapazität besitzen. Von Interesse sind aber bei der Scheinwiderstandsbestimmung nicht irgendwelche von der Meßspannungsamplitude abhängigen Sekantenwerte, sondern die differentiellen Größen. Aus der Gleichrichtertheorie ergibt sich, daß die Meßspannungsamplitude nur einen Bruchteil der Temperaturspannung $\frac{kT}{e}$ ausmachen darf (bei Zimmertemperatur 25 mV); Messungen an Gleichrichterzellen in der Apparatur unter Variation der Höhe der Meßspannung zeigten, daß das Ziel mit 5 mV_{eff}⁹⁾ erreicht war. Diese Spannung wurde daraufhin bei den Messungen immer verwendet.

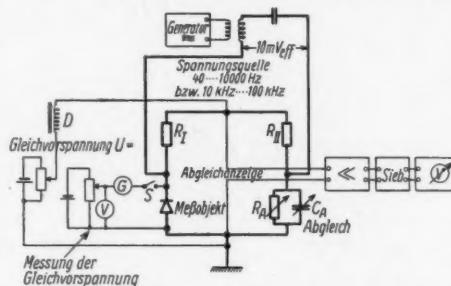


Abb. 3. Schaltbild des Scheinwiderstands-Meßplatzes schematisch

⁸⁾ Auf die Möglichkeit, im Gegensatz zu Pfotzer auch sehr tiefe Frequenzen messen zu können, wurde Wert gelegt. Die Halbkreise, von denen bei Cu_2O -Gleichrichtern, wie eingangs erwähnt, bei hohen Frequenzen Abweichungen auftreten, sollten durch Tieffrequenzmessungen genau festgelegt werden können.

⁹⁾ 5 mV_{eff} am Meßobjekt bedeuten 10 mV_{eff} Brückenspannung.

Eine so geringe Meßspannung stellt andererseits sehr hohe Anforderungen an die als Nullinstrument dienende Abgleichsanzeige. Diese bestand in der hier geschilderten Apparatur aus einem Verstärker (7 Neper), einem Siebglied und einem Röhrenvoltmeter ($30 \mu \text{V/3 V}$). Ihre Spannungsempfindlichkeit war 10^{-6} V .

Die Zuführung der Gleichvorspannung an die Meßobjekte erfolgte durch Anlegen einer Gleichspannung (U_{G} in Abb. 3) an die Indikator-Diagonale¹⁰⁾. Ein Anschluß direkt an das Meßobjekt erfolgte nicht, um jegliche Fälschung des Scheinwiderstandes durch den sonst vorhandenen Nebenschluß zu umgehen¹¹⁾.

Die Bestimmung der am Meßobjekt liegenden Gleichspannung wurde nach der Methode der Spannungskompensation mittels eines auf Nullausschlag einzu-regelnden äußerst empfindlichen Spiegelgalvanometers G vorgenommen. Da die Verbindung zwischen Brücke und Meßeinrichtung nach erfolgter Kompensation völlig stromlos ist, kann sie vor Ausführung des Wechselstromabgleichs durch den Schalter S unterbrochen werden, ohne eine Veränderung der Gleichspannungsverhältnisse am Meßobjekt hervorzurufen. Somit ist dann auch jegliche Fälschung des Scheinwiderstandes durch Nebenschluß unterbunden. Die Genauigkeit der Gleichspannungsbestimmung war durch die Ablesegenauigkeit des Voltmeters gegeben, mit dem die Kompensationsspannung abgelesen wurde. Sie betrug dementsprechend bis herab zu 100 mV etwa 0,5%.

Besondere Sorgfalt mußte bei der zu verwendenden niedrigen Meßspannung auf die Aussiebung von Oberwellen und von Frequenzen, die von außen eingestreut werden, gelegt werden. Die Fremdfrequenzen und Oberwellen werden ja bei den meisten Meßobjekten nicht wie die Meßfrequenz beim Abgleich in der Indikator-Diagonale bis auf Null herab geschwächt und verbleiben daher als Null-Ausschlag in der Abgleichsanzeige. Die Aussiebung erfolgte zwecks gleichzeitiger Vernichtung des Verstärker-Brumms bis 10 KHz durch Einschalten eines Oktavstiebes und darüber durch Verwendung eines doppelten Resonanzkreises zwischen Verstärker und Röhrenvoltmeter. Es gelang so, eine brauchbare Abgleichsanzeige zu erreichen. Die Abgleichsempfindlichkeit war im günstigsten Falle $\Delta R/R = 3 \cdot 10^{-4}$.

Die Brücke wurde im übrigen so dimensioniert, daß mit ihr vor allem Cu_2O -Gleichrichter von 40 mm Durchmesser gemessen werden konnten.

Da diese und ebenfalls die Scheiben aus massivem Cu_2O in ihrem Widerstandsverhalten stark temperaturabhängig sind und auch bei verschiedenen Temperaturen durchgemessen werden sollten, mußten sie während der Messung in einem Thermostat untergebracht werden. Für Messungen bei 303°K bestand derselbe aus einem selbsttätig temperaturgeregelten Ölbad, in das die Meßobjekte eingetaucht wurden. Bei 273°K wurde ein kleines Ölbad, das die masiven Cu_2O -bzw. die Gleichrichterscheiben enthielt, mit Eiswasser gekühlt. Für Messungen zwischen 195°K und 273°K wurden die Meßobjekte auf einen Kupferblock montiert, der im Inneren mit einer Heizspirale versehen war. Dieser Kupferblock wurde sodann in CO_2 -Eis gebettet und die gewünschte Temperatur durch ent-

¹⁰⁾ Die Drossel D ist eingebaut, um einen Kurzschluß des Verstärker-Eingangs durch die Gleichspannungsquelle zu verhindern.

¹¹⁾ Ein Nachteil dieser Anordnung besteht darin, daß die an dem Meßobjekt liegende Gleichspannung sich während des Abgleichs auf Grund der Spannungsteilung zwischen $R_A + R_{II}$ und dem Gleichstromwiderstand der Drossel D verändern kann. Es mußte also nach erfolgtem Wechselstromabgleich die Gleichspannung am Meßobjekt nachge-prüft und auf den gewünschten Sollwert nachgeregelt werden, daraufhin der Wechsel-stromabgleich neu vorgenommen werden usw. Infolge der beim Feinabgleich völlig vernachlässigbaren Gleichspannungsänderung konvergiert diese Methode sehr rasch.

sprechende Regelung der Heizung erreicht. Die Temperaturbestimmung erfolgte teils durch ein in den Kupferblock eingeführtes Thermometer, später mittels eines auf dem Meßobjekt aufliegenden Thermoelementes¹²⁾.

Die Frage der Verbindungsleitung von der Meßbrücke zu dem im Thermostaten befindlichen Meßobjekt bereitete einige Schwierigkeiten, da bei hohen Frequenzen der Scheinwiderstand der Meßobjekte schon durch die geringsten Zuleitungs-widerstände und Induktivitäten beeinflußt wird. Eine Lösung wurde in einer besonderen symmetrischen Ausführung der Leitungen nach dem Prinzip des konzentrischen Kabels gefunden, wobei zur Vermeidung von ohmschen Verlusten breite Cu-Schienen verwendet wurden.

Für die Überprüfung der Genauigkeit des Meßplatzes wurde verhältnismäßig viel Zeit aufgewendet, worüber im einzelnen hier nicht berichtet werden soll.

Es wurden zu diesem Zweck Ersatzschemata nach Abb. 1, die aus Kondensatoren und Widerständen bekannter Größe zusammengebaut waren, durchgemessen. Der Frequenzgang des Scheinwiderstandes einer solchen Schaltung kann rechnerisch ermittelt werden. Die gemessenen Werte wichen jeweils nur wenig von den errechneten ab. Allerdings variiert die Genauigkeit mit dem Widerstand der Meßobjekte. Es wurden daher immer Vergleichsmessungen an entsprechenden Ersatzschemata vorgenommen und die eigentlichen Messungen nur dann verwendet, wenn durch die Vergleichsmessungen eine genügende Genauigkeit sichergestellt war.

§ 3. Die Leitfähigkeitsanalyse nach K. Lebovec

Wenn in einem Meßobjekt die spezifische Leitfähigkeit κ örtlich variiert, so müssen zwei voneinander grundsätzlich abweichende Fälle unterschieden werden:

In dem einen Fall wird die örtlich variiierende Konzentration der Leitungsträger (beim Cu_2O handelt es sich um Defektelektronen) durch die angelegte Wechselspannung praktisch nicht beeinflußt. Etwaige Konzentrationsgradienten sind zeitunabhängig. Der Diffusionsstrom enthält also nur einen Gleich-, aber keinen Wechselanteil. Wechselstrommäßig führt eine solche Schicht daher lediglich einen Feldstrom $\kappa \mathcal{E}_0$ und einen Verschiebungsstrom $\frac{\epsilon}{4\pi} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}$, aber keinen Diffusionsstrom.

Das Verhalten des Objektes kann also durch eine räumlich zwar veränderliche, zeitlich aber fest gegebene Leitfähigkeit κ und eine Dielektrizitätskonstante ϵ gekennzeichnet werden. Ein solches Objekt wird als „Festschicht“ bezeichnet¹³⁾.

Im anderen Fall, der z. B. in der Randschicht eines Cu_2O -Gleichrichters auftritt, ist die Konzentration der Ladungsträger an jeder Stelle von dem Momentanwert der angelegten Wechselspannung merklich abhängig.

In dem Gleichrichter variiert, mindestens innerhalb der Randschicht, die örtliche Leitfähigkeit sehr stark, denn die Zahl der Defektelektronen steigt von einem sehr niedrigen Wert an der Elektrode mit wachsender Entfernung von dieser

¹²⁾ Die Temperaturkonstanz wurde bei Gleichrichtern im übrigen durch Kontrollmessungen, bestehend aus Scheinwiderstandsbestimmungen am Meßobjekt bei 50 KHz, überprüft. Es hatte sich nämlich gezeigt, daß bei Tieftemperaturen die Temperatur-abhängigkeit der Gleichrichter sich sehr stark in Veränderungen der bei 50 KHz notwendigen Abgleichskapazität C_4 bemerkbar mache.

¹³⁾ Siehe auch E. Spenke, Wiss. Veröffentl. Siemens XX, S. 40, 1941, namentlich S. 50, und E. Spenke, Z. Physik 128, 586 (1950) namentlich Abb. 1 und 2.

Elektrode monoton an, um am Ende der Randschicht in 10^{-6} bis 10^{-4} cm Entfernung von der Elektrode die durch die Quasi-Neutralitätsbedingung erzwungenen Werte anzunehmen. Es ist aber in diesem Fall beim Anlegen einer Wechselspannung der Defektelektronengehalt an jeder Stelle nicht zeitlich konstant, sondern schwankt im Takte der anliegenden Wechselspannung und ruft dadurch auch eine Wechselspannungsabhängigkeit des Diffusionstromes hervor. Es bewirkt dies einen anderen Scheinwiderstand, als wenn es sich um eine Festschicht mit gleicher örtlicher Leitfähigkeitsverteilung handelte.

K. Lehovec geht bei der von ihm vorgeschlagenen Leitfähigkeitsanalyse von dem zuerst geschilderten Fall einer Festschicht aus, die ja schon sehr früh bei der Diskussion der dielektrischen Nachwirkung von Maxwell¹⁴⁾ und später von K. W. Wagner¹⁵⁾ behandelt worden war. Das Ersatzschaltbild einer Festschicht besteht¹⁶⁾ entsprechend den Ladungstaunungen, die in ihrem Inneren auftreten, aus einer Kette von Parallelschaltungen von je einem Widerstand und einer Kapazität (Abb. 4 b).

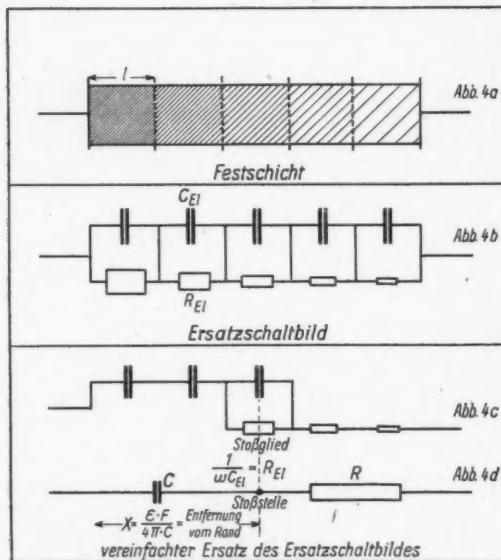


Abb. 4. Ersatzschaltbild einer Festschicht

groß. Die R_{EI} sind entsprechend der örtlichen Änderung des spezifischen Widerstandes verschieden¹⁷⁾.

Eine vereinfachte Auswertung des Scheinwiderstandes einer solchen Kette von Parallelschaltungen ist von K. Lehovec¹⁸⁾ vorgeschlagen worden. Lehovec

¹⁴⁾ J. C. Maxwell, Lehrbuch der Elektrizität und des Magnetismus (Berlin 1883), Bd. 1, Art. 328–330.

¹⁵⁾ K. W. Wagner, Arch. Elektrotechn. 2, 371 (1914) u. „Theoretische Grundlagen“ in H. Schering, „Die Isolierstoffe in der Elektrotechnik“ (Berlin 1924).

¹⁶⁾ Vgl. hierzu auch G. Pfitzner, a. a. O., Abb. 8.

¹⁷⁾ Im folgenden soll die Festschicht immer so angeordnet gedacht sein, daß ihr Widerstand (dies gilt somit also auch für die R_{EI} -Werte) von links nach rechts monoton abnimmt.

¹⁸⁾ Nach brieflichen und mündlichen Mitteilungen von K. Lehovec aus dem Jahre 1945.

Jedes Kettenglied entspricht einer Festschichtscheibe (Abb. 4a) von der Dicke l und hat infolgedessen eine Kapazität

$$C_{EI} = \frac{\varepsilon F}{4\pi l}$$

und einen Widerstand

$$R_{EI} = \frac{l}{\pi F}$$

Bei Unterteilung in gleich lange Elementarstücke sind die C_{EI} alle gleich

ber
bil
die
sch
der
im
che

ist.

Bei
sta
wer

kei
sche
und
Grü

Gli
C k

täte
 R_{EI}
nete
L

Seit
nach
nun

denn
den
täts

stim
glei

in fo

2

bemerkt, daß bei jeder genügend hohen Frequenz in dem Festschicht-Ersatzschaltbild (Abb. 4b) die ersten Glieder praktisch wie eine reine Kapazität wirken, denn die parallel geschalteten Widerstände sind sehr groß, es wird ein fast reiner Verschiebungsstrom fließen. Entsprechend der Abnahme der Parallel-Widerstände der einzelnen Kettenglieder von links nach rechts wird diese Vernachlässigung immer weniger berechtigt sein, und man gelangt schließlich an ein Glied, bei welchem gerade

$$\frac{1}{\omega C_{EI}} = R_{EI}$$

ist.

Dieses Glied soll als Stoßstelle, bzw. Stoßglied (Abb. 4c) bezeichnet werden. Bei den noch weiter rechts gelegenen Gliedern wird allmählich der ohmsche Widerstand R_{EI} klein gegenüber dem kapazitiven Widerstand werden. Diese Glieder werden dann praktisch wie ohmsche Widerstände wirken.

Lehovec ersetzt nun den Übergang von kapazitiver zu ohmscher Leitfähigkeit durch einen diskreten Sprung an der Stoßstelle und erhält das Ersatz-Ersatzschaltbild der Abb. 4d, das aus der Reihenschaltung einer einzigen Kapazität C und eines einzigen Widerstandes R besteht. R und C sind aber aus folgenden Gründen frequenzabhängig.

Erhöht man die Frequenz, so wird der kapazitive Widerstand $1/\omega C_{EI}$ in allen Gliedern kleiner und die Stoßstelle verschiebt sich weiter nach rechts. D. h. aber, C besteht jetzt aus einer Hintereinanderschaltung von mehr Elementar-Kapazitäten C_{EI} und R aus einer Reihenschaltung von weniger Elementar-Widerständen R_{EI} . Das bedeutet, daß sowohl C als auch R kleiner werden. Durch Wahl geeigneter Frequenzen gelingt es, jedes beliebige Glied zur Stoßstelle zu machen.

Die Entfernung x von der Elektrode, welche die Festschicht auf der linken Seite abgrenzt (wenn man den Fall betrachtet, daß die Leitfähigkeit von links nach rechts monoton ansteigt) und die Leitfähigkeit der Stoßstelle lassen sich nun aber aus den Größen R und C auf folgende Weise bestimmen.

Die Entfernung x berechnet sich nach der Kondensatorformel zu

$$x = \frac{\epsilon F}{4\pi C}, \quad (1)$$

denn die Entfernung vom Beginn der Festschicht bis zur Stoßstelle wirkt ja nach den gemachten Vereinfachungen wie eine ideale Kapazität mit der Dielektrizitätskonstante ϵ .

Die Leitfähigkeit κ an der Stoßstelle läßt sich nach zwei Methoden bestimmen:

1. Sie hängt mit der gerade vorliegenden Frequenz gemäß der Definitionsgleichung der Stoßstelle

$$R_{EI} = \frac{1}{\omega C_{EI}} \quad \text{oder} \quad \frac{l}{\kappa F} = \frac{1}{\omega} \frac{4\pi l}{\epsilon F}$$

in folgender Weise zusammen:

$$\kappa = \frac{\epsilon}{4\pi} \omega. \quad (2)$$

2. Bei einer Verschiebung der Stoßstelle um dx , also nach Gl. (1) um

$$dx = \frac{\epsilon F}{4\pi} d(1/C)$$

nimmt R um den Betrag

$$dR = -\frac{dx}{\kappa F} = -\frac{\frac{\epsilon F}{4\pi} d(1/C)}{\kappa F}$$

ab. Es ist also

$$\kappa = -\frac{\epsilon}{4\pi} \frac{d(1/C)}{dR}. \quad (3)$$

Bei der Auftragung werden die mit Hilfe von Gl. (1) und Gl. (2) berechneten $\kappa(x)$ -Kurven mit $\circ\circ\circ$ bezeichnet. Bei Benützung von Gl. (1) und Gl. (3) werden die Kurvenpunkte mit $\square\square\square$ markiert. Eine Bestimmung von κ nach (2) und (3) aus der gemessenen scheinbaren Serienkapazität $C = \frac{1}{w/Im R}$ und dem scheinbaren Serienwiderstand $R = Re R$ wollen wir im folgenden als „Leitfähigkeitsanalyse“ (in diesem ganz speziellen und prägnanten Sinn gemeint) bezeichnen.

Wenn für eine Schicht, die als Festsschicht bestimmter Leitfähigkeitsverteilung angesehen werden kann, die beiden Kurvenzüge zusammenfallen, wenn also nach beiden Methoden übereinstimmende Rechenergebnisse erhalten werden, sind die benützten Annäherungsannahmen zulässig. Wie weit das bei Leitfähigkeitsgängen verschiedener Art („Leitfähigkeitsmodelle“) zutrifft, kann man dadurch prüfen, daß man von einer modellmäßig gegebenen örtlichen Leitfähigkeitsverteilung ausgeht, den Gang des Scheinwiderstandes einer solchen Schicht mit der Frequenz rechnersich exakt ermittelt und nun auf diesen errechneten Scheinwiderstand die durch Gl. (2) und (3) gegebene „Lehovec-Auswertung“ anwendet. Man erhält dann die beiden Lehovec-Kurven $\circ\circ\circ$ und $\square\square\square$ und kann ihren Verlauf mit der der ganzen Rechnung zu grunde gelegten wirklichen Leitfähigkeitsverteilung vergleichen.

Als Ergebnis derartiger rechnerischer Untersuchungen¹⁹⁾ läßt sich zusammenfassend sagen, daß die Lehovec-Kurven bei in ihrer Leitfähigkeit genügend gleichmäßig und genügend stark varierenden Schichten tatsächlich im Innern dieser Schichten zusammenfallen und dann annähernd den richtigen Leitfähigkeitsverlauf wiedergeben. Zu Beginn und zu Ende einer solchen Schicht treten aber Abweichungen auf²⁰⁾. Die Ausdehung der Anfangs- und Endstörung ist um so größer, je geringer der relative Leitfähigkeitsanstieg innerhalb der Schicht ist. So wird es verständlich, daß bei einer Schicht konstanter Leitfähigkeit die Lehovec-Kurven gar nicht mehr zusammenfallen. Es ergibt sich vielmehr ein Verhalten nach Abb. 5. Trotzdem ist auch in diesem Fall die Lehovec-Auswertung aufschlußreich, indem nämlich wenigstens die waagerecht verlaufende Kurve $\square\square\square$, die nach Gl. (1) und (3) berechnet worden ist, die richtige Leitfähigkeit der Schicht angibt.

Es ist noch darauf hinzuweisen, daß oben die Annahme einer von links nach rechts monoton ansteigenden Leitfähigkeit gemacht wurde. Dementsprechend waren auch die Kettenglieder in Abb. 4 angeordnet. Da eine Vertauschung der Plätze der Kettenglieder untereinander jedoch für den Scheinwiderstand nichts ausmacht, erhält man auch nach jedem beliebigen Platzwechsel der Kettenglieder

¹⁹⁾ Diese Ergebnisse seiner Untersuchungen wurden mir freundlicherweise von Herrn Dr. Speenke zur Verfügung gestellt.

²⁰⁾ Am Beginn und am Ende der Schicht treten schon allein deswegen Abweichungen auf, weil nach Gl. (2) der Wert von κ_0 ja unabhängig von den wirklichen Leitfähigkeitswerten immer mit 0 beginnen und mit ∞ endigen muß.

dieselbe Leitfähigkeitsanalyse. Die x -Werte entsprechen also nur bei monoton nach rechts ansteigender Leitfähigkeit der Entfernung vom linken Rande der Festschicht. Im allgemeineren Falle läßt sich aus der Leitfähigkeitsanalyse nur angeben, über welche Gesamtstrecke $\Sigma \Delta x$ man forschreiten muß, um insgesamt

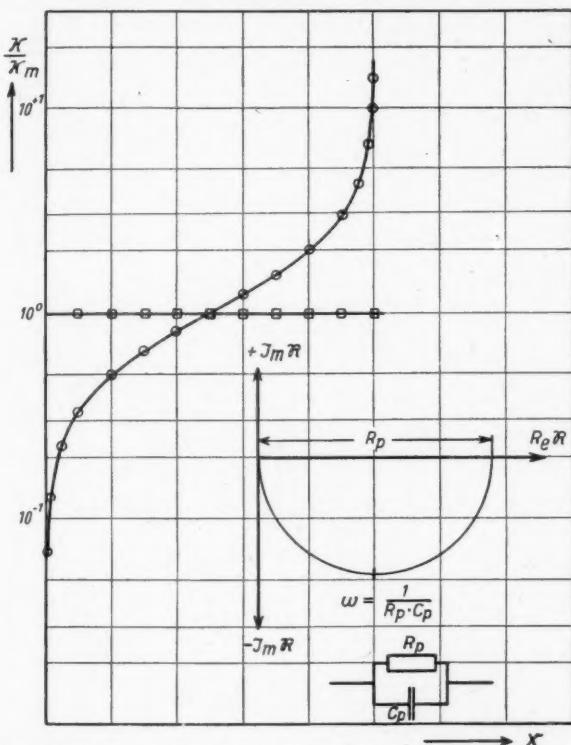


Abb. 5. Leitfähigkeits-Kurven einer Festschicht örtlich konstanter Leitfähigkeit bzw. einer reinen Erschöpfungs-Randschicht. (κ = logarithmisch, x = linear; es ist $\kappa = \kappa_m$ angenommen)

einen Leitfähigkeitsunterschied $\Delta \kappa$ zu überstreichen. $\Sigma \Delta x$ gibt in diesem Falle die Summe derjenigen Schichtdicken an, in denen die Leitfähigkeit zwischen κ und $\kappa + \Delta \kappa$ liegt.

In Abb. 6 sind einige Typen von Leitfähigkeitsverteilungen schematisch gezeigt, die alle dieselbe Leitfähigkeitsanalyse ergeben würden. Allerdings würden sich hier die Anfangs- und Endstörungen nur bei der Verteilung nach Abb. 6a als solche bemerkbar machen; in Abb. 6b und 6c würde die Endstörung gerade die Verteilung in den mittleren Gebieten größter Leitfähigkeit falschen.

Alle diese Überlegungen beziehen sich zunächst auf Festschichten mit spannungs-unabhängiger Elektronenkonzentration. Es zeigt sich jedoch, daß das Verhalten der gleichrichtenden Randschichten ohne allzu große Ungenauigkeiten in das

„Festschicht“-Schema einbezogen werden kann. Für Erschöpfungsrandsschichten folgt das daraus, daß für sie das Ersatzschaltbild der Abb. 1²¹) gilt, d. h. es wird scheinwiderstandsmäßig eine Festschicht örtlich konstanter Leitfähigkeit vorgestellt, deren Leitfähigkeitsanalyse wie in Abb. 5 aussieht und die die typische

Aufspaltungsform der ○○○- und □□□-Kurve besitzt. Durch die □□□-Kurve wird in diesem Fall der durch

$$\varepsilon_m = \frac{\varepsilon}{4\pi R_p C_p} \quad (4)$$

definierte „Mittelwert“ der Leitfähigkeit innerhalb der Erschöpfungsrandsschicht bestimmt.

Andererseits wurde von W. Schottky vermutet, daß bei Vorliegen von Reserverandschichten²²⁾ die Leitfähigkeitsanalyse ein weitgehendes Zusammenlaufen von □□□-Kurve, ○○○-Kurve und wahrer Leitfähigkeitsverteilung²³⁾ ergeben kann. Von Spenke konnte hierfür, zumindest bei hohen Sperrspannungen, der direkte rechnerische Nachweis geführt werden²⁴⁾ 24a). Es dürfte nicht unmöglich sein, daß dies auch bei niederen Sperrspannungen und im spannungslosen Zustand zutrifft, wenn auch hier der rechnerische Nachweis noch größere Schwierigkeiten bereitet.

Diese Situation läßt sich wohl so kennzeichnen, daß wechselstrommäßig die Diffusions-

effekte die Berechnungen zwar etwa im Verhältnis 1:2^{±1}, aber nicht stärker

Abb. 6. Verschiedene Leitfähigkeitsverteilungen (schematisch). Sie ergeben in der Analyse alle die Form a)

fälschen können, so daß in dem über viele Zehnerpotenzen untersuchten Leitfähigkeitsgang dadurch keine wirklich entscheidenden Änderungen bedingen werden.

Nach diesen einführenden Angaben, welche auch für Teil II und III gültig sind, möge nun auf die eigentlichen Messungen an massiven Cu₂O-Scheiben näher eingegangen werden.

§ 4. Meßobjekte

Massive Kupferoxydulscheiben, wie sie für die im folgenden geschilderten Messungen verwendet wurden, wurden durch vollständiges Durchoxydieren von

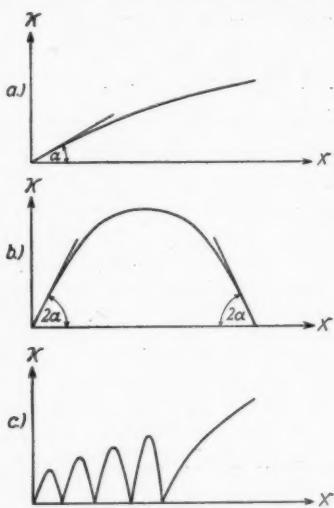
²¹⁾ E. Spenke, I. c.

²²⁾ Über Reserverandschichten siehe z. B. W. Schottky und E. Spenke, Wiss. Veröffentl. Siemenswerke XVIII, 225 (1939).

²³⁾ Die wahre Leitfähigkeitsverteilung ergibt sich dabei jedoch nur unter der Zusatzausnahme von Anmerkung 24.

²⁴⁾ E. Spenke, Z. Physik 128, 586 (1950). Hierbei wurde die Annahme gemacht, daß die Zeitkonstanten der Störstellenassoziation und Dissoziation klein gegenüber der dielektrischen Zeitkonstanten sind.

^{24a)} Anmerkung bei der Korrektur: Nach einer neuen Untersuchung von W. Schottky (erscheint in Z. Physik) wird das ganze Scheinwiderstandsbild des Cu₂O-Gleichrichters im wesentlichen von den Trägheitseffekten beherrscht, so daß bei ihm der obigen Leitfähigkeitsanalyse nur eine formale Bedeutung zukommt. Hierauf kann jedoch erst in Teil III zurückgegriffen werden.



hichten
es wird
vorge-
ypische
□□□-
Kurve

(4)

higkeit
cht be-

ottky
eserve-
analyse
n von
wahre
kann.
est bei
e rech-
²⁴). Es
s auch
nd im
wenn
s noch

Die
chnen,
sionale
stärker
Leit-
eding

g sind,
er ein-

derten
n von

Wiss.

zusätz-
macht,
er der

on W.
Cu₂O-
ihnen
kann

C
g
F
N

m
in

um
dü
ox

reg
etw
übr
cha
einf
Die

bel
Ofe
30

aus
num
ab.

bzw
(n =
Ver

(195
lung
sind
Beha
fähig
hierb
F. W

bzw.
8
Buch
ein a
gege
Gleic

I
L
(
L

▲

Cu-Scheiben hergestellt. Die Cu-Scheiben bestanden meist aus dem verunreinigungsarmen, für Gleichrichterzwecke so besonders geeigneten CCC-Kupfer*) der Fertigung vor 1948. Es wurde außerdem auch noch eine Scheibe aus Kupfer der Norddeutschen Affinerie (NA-Kupfer) verwendet.

Die Scheiben waren rund und trugen innen eine Bohrung. Der Außendurchmesser der durchoxydierten Scheiben betrug etwa 4 cm, der Durchmesser der inneren Bohrung etwa 1,4 cm. Die Dicke war etwa 0,15–0,2 cm.

Die Cu-Scheiben wurden meistens einzeln auf einem Stahlstab aufgehängt und so durchoxydiert und abgekühlt. Einige der Scheiben wurden auf eine sehr dünn mit Korundpulver bestreute Korundplatte gelegt und in dieser Lage durchoxydiert und abgekühlt.

Die Glühung erfolgte bei ungefähr 1020°C (es wurde 1020°C anfangs eingeregelt, bei Beendigung des Prozesses oft aber nur noch 1000°C gemessen) während etwa 18 Stunden. Dann wurden, entsprechend dem bei der Gleichrichterherstellung üblichen Verfahren, das zu verhältnismäßig gut leitendem Cu_2O mit Defektleitungscharakter führt²⁵⁾, die Scheiben mit ihrer oben geschilderten Halterung direkt in einen auf 500°C eingeregelten Ofen eingebbracht und dort 30 Minuten getempert. Die Abkühlung erfolgte verschiedenartig.

1. Die im folgenden mit ll bezeichneten Scheiben wurden im 500°C -Ofen belassen und dieser nach der Glühzeit abgeschaltet. Sie wurden erst, nachdem der Ofen auf mindestens 100°C abgekühlt war, entnommen. Dies dauerte etwa 30 Stunden. (ll = sehr langsam abgekühlt.)

2. Die im folgenden mit l bezeichneten Scheiben wurden nach der Glühzeit aus dem Ofen entnommen und kühlten mit ihrer Aufhänge- bzw. Auflageanordnung an Luft bei einer Raumtemperatur von 20 – 30°C innerhalb von Minuten ab. (l = langsam abgekühlt.)

3. Die im folgenden mit n bezeichneten Scheiben wurden mit der Aufhänge- bzw. Auflageanordnung nach Beendigung der Temperung im Wasser abgeschreckt. (n = „normal“, d. h. entsprechend dem in der Gleichrichterfertigung üblichen Verfahren)²⁶⁾.

*) CCC bedeutet Chile Copper Corporation.

²⁵⁾ Von G. Blankenburg u. K. Kassel (Forschungen und Fortschritte **26**, 33 (1950), 3. Sonderheft) wurde allerdings darauf hingewiesen, daß unter anderen Herstellungsbedingungen auch Anzeichen für das Auftreten von Überschulleitung vorhanden sind. Sicher ist, jedenfalls nach Versuchen von F. Waibel, daß durch evakuierende Behandlung bei hohen Temperaturen Cu_2O mit um Zehnerpotenzen geringerer Leitfähigkeit als nach dem üblichen Verfahren gewonnen werden kann; nach Waibel tritt hierbei allerdings nur oberhalb 500°C Überschulleitung auf. [Vgl. W. Schottky u. F. Waibel, Physik. Z. **34**, 888 (1933) und **36**, 716 (1935)].

²⁶⁾ Die Unterschiede der Abkühlungsart kommen auch in der Benennung der Scheiben bzw. Gleichrichter zum Ausdruck.

Scheiben, bzw. Gleichrichter, welche die Bezeichnung LL tragen sind ll -, welche den Buchstaben L tragen sind l - und Scheiben mit dem Buchstaben N sind n -Scheiben. Wurde ein anderes Ausgangsmaterial als CCC-Kupfer verwendet, so ist dies in Klammern angegeben. Bei Massiv-Scheiben erfolgt die Numerierung in arabischen Zahlen, bei Gleichrichterscheiben in römischen Zahlen.

Beispiel:

$LL\ 2$ ist eine massive Scheibe aus CCC-Kupfer und ll -abgekühlt

(NA) $L\ 9$ ist eine massive Scheibe aus NA-Kupfer l -abgekühlt

(SI) $N\ X$ ist eine Gleichrichterscheibe aus einem Spezialkupfer (SI) und n -abgekühlt

$L\ III$ ist eine Gleichrichterscheibe aus CCC-Kupfer und l -abgekühlt.

Die Entfernung des oberflächlich gebildeten Oxyds erfolgte in den meisten Fällen durch Abtragen mit Polierpapier und von Hand. Da besonders die aufgehängten Scheiben etwas gekrümmmt waren, war eine gleichmäßige Abtragung nicht unbedingt gewährleistet. Die auf Korund aufgelegten Scheiben besaßen auf der Auflagefläche festgewachsene Korundreste, die durch Abpolieren entfernt wurden.

In einem im folgenden besonders genannten Fall wurde nach der mechanischen Abtragung das Cu_2O noch einer Ätzbehandlung (HCl , FeCl_3 , HNO_3 , NH_4Cl), ähnlich wie sie bei Gleichrichtern angewendet wird, unterworfen.

Die Scheiben wurden nach dem Polieren kurz mit Wasser gespült und in einem warmen Luftstrom getrocknet. Die Kontaktierung erfolgte durch beidseitiges Aufdampfen von Silber „1000“ in einem Vakuum von etwa 10^{-4} torr.

Vor der Versilberung wurde zur Vermeidung eines Kurzschlusses der beidseitigen Kontaktierungen rund um die innere Bohrung mit Lack ein Ring von etwa 0,1 cm Breite aufgetragen, der nach der Versilberung mit Benzol entfernt wurde. Durch Auflegen einer Schablone während der Bedampfung wurde erreicht, daß auch der Außenrand der Silberkontakteierung noch etwa 0,1 bis 0,2 cm Abstand vom Außenrand der Cu_2O -Scheibe besaß.

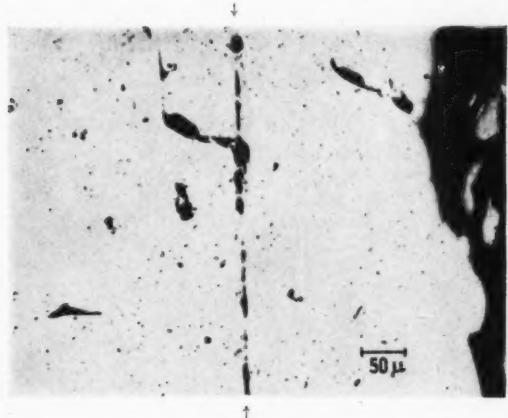


Abb. 7. Der „Spalt“.

Es muß noch darauf hingewiesen werden, daß bei der geschilderten Durchoxydierung von Kupferplatten, bei freihängenden Scheiben annähernd in der Mitte, bei aufgelegten nach der Auflageseite verschoben, eine im folgenden als „Spalt“ bezeichnete Erscheinung auftritt: Eine zerbrochene Cu_2O -Scheibe weist, mit bloßem Auge betrachtet, an dieser Stelle eine Linie auf. Das Mikroskop zeigt, wie in der Aufnahme (Abb. 7) wiedergegeben, daß entlang dieser Linie im Cu_2O Löcher auftreten, die eine Breite bis etwa 10μ annehmen. Durch diese Löcher dürfte wohl aber höchstens $\frac{1}{3}$ bis $\frac{2}{3}$ des sonst dem Strom zur Verfügung stehenden gesamten Querschnitts weggenommen werden, was wegen der Feinverteilung der Durchlaßstellen, infolge des bekannten Siebwiderstandseffektes nur, zu einer geringen Vergrößerung der effektiven Schichtdicke führt.

Da durchoxydierte Scheiben sehr zerbrechlich sind, wurden zur Kontaktgabe Messingringe mittels weichen Federn schwach auf die Silberkontakteierung aufgedrückt.

§ 5. Untersuchungen über die vorhandene Leitfähigkeitsschichtung

Die Scheinwiderstandsmessungen kann man zur Diskussion einer auftretenden Leitfähigkeitsschichtung auf zwei Wegen auswerten. Einmal kann man die in

§ 3 beschriebene Leitfähigkeitsanalyse anwenden, andererseits kann man aber auch schon aus einer Auftragung der direkt gemessenen R_A - und C_A -Werte in Abhängigkeit von der Frequenz einen gewissen Einblick gewinnen.

R_A und C_A bedeuten hierbei die bei der Messung eingestellten Werte des Abgleichwiderstandes und der Abgleichkapazität in der Meßbrücke (Abb. 3). Es ist also $1/R_A$ gleich der Realkomponente und das mit der Kreisfrequenz multiplizierte C_A , d. h. ωC_A , gleich der Imaginärkomponente des Leitwertes des Meßobjektes²⁷⁾.

Man erkennt an Hand dieser Auftragung sofort, daß in den Scheiben eine Leitfähigkeitsschichtung vorhanden sein muß, denn ohne eine solche müßten R_A

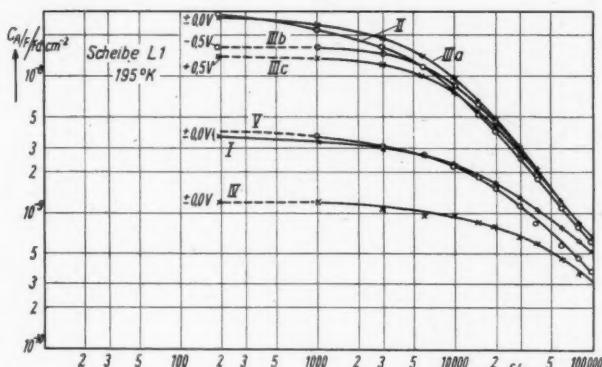


Abb. 8. Alterungerscheinungen und Abhängigkeit der Kapazität C_A von der Vorspannung bei einer massiven Cu_2O -Scheibe.

- I. Nach dem 5. Polieren sofort versilbert und sofort gemessen } ohne Vorspannung
- II. wie I., aber 4 Tage mit Silberkontakteierung gealtert } spannung
- IIIa-c. wie I., aber 5 Tage mit Silberkontakteierung gealtert, mit verschiedenen Vorspannungen
- IV. nach dem 6. Polieren, Scheibe ohne Silber 4 Tage gealtert, } ohne Vorspannung
- sofort nach dem Versilbern gemessen
- V. wie IV., aber auch noch mit Versilberung 1 Tag gealtert } spannung

und C_A unabhängig von der Frequenz sein. Bei den durchgemessenen Scheiben tritt aber immer eine Abnahme der Werte von C_A , häufig auch der Werte von R_A mit steigender Frequenz auf (Abb. 8, 9), wo durchweg die auf die Flächeneinheit der Scheiben umgerechneten Größen $R_A F$ und C_A/F aufgetragen sind (F = Kontaktierungsfläche).

Ein gewisser Einblick in die Art der auftretenden Leitfähigkeitsschichtung ergibt sich daraus, daß sich die gemessenen Frequenzgänge, insbesondere von C_A , durch Altern²⁸⁾ verändern. Insbesondere zeigen genauere Untersuchungen, daß die Alterungerscheinungen erst durch das Aufbringen der Kontaktierung ausge-

²⁷⁾ D. h. R_A und C_A sind hier die effektiven Werte von scheinbarem Parallelwiderstand und Parallelkapazität, im Gegensatz zu den im § 3 diskutierten Serienwerten R und C .

²⁸⁾ Altern bedeutet hier einfach das Auftreten von Veränderungen bei Lagern in Zimmertemperatur ohne Belastung.

löst werden, denn durch vorangehende unkontaktierte Lagerung kann der Effekt nicht vorweggenommen werden (man vergleiche die Kurven mit der Angabe $\pm 0,0$ V in Abb. 8)²⁹⁾. Daß im übrigen auch eine Vorspannungsabhängigkeit vorhanden ist (Vergleich der Kurven IIIa, b, c in Abb. 8), deutet darauf hin, daß es sich um Randverarmungsschichten handelt, die durch Veränderungen des Randstörstellengehaltes im Cu_2O altern.

In schlecht leitendem Material (*ll*-Scheiben) sind die alternden Schichten hochohmiger als in besser leitendem Material (*l*-Scheiben), wie Abb. 9 zeigt.

In Abb. 9 ist ebenfalls noch der Frequenzgang von $R_A F$ bei einer (freihängend geglühten) *l*-Scheibe gezeigt. Bei dieser Scheibe wurde auch eine Kontaktierung

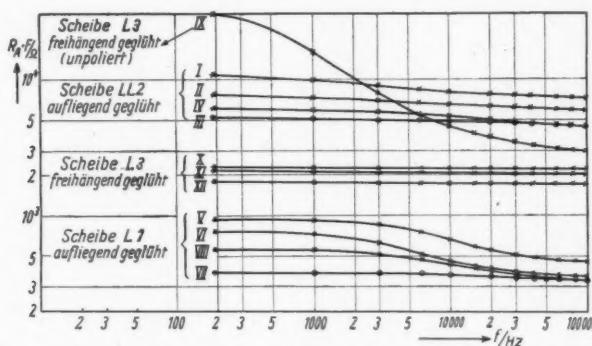


Abb. 9. Frequenzabhängigkeit der $R_A F$ -Werte bei verschiedenen Material (195 °K, ohne Vorspannung)

I Nach dem 3. Polieren	VII Nach dem 5. Polieren, Sofortmessung
II Nach dem 4. Polieren	VIII Nach dem 5. Polieren und 4tägiger
III Nach dem 5. Polieren, Sofortmessung	Alterung
IV Nach dem 5. Polieren und 1tägiger	IX Vor dem Polieren
Alterung	X Nach dem 1. Polieren, Sofortmessung
V Nach dem 3. Polieren	XI Nach dem 2. Polieren, Sofortmessung
VI Nach dem 4. Polieren	XII Nach dem 3. Polieren, Sofortmessung

und Messung im unpolierten Zustand, d. h. also vor einer Entfernung des bei der Glühung oberflächlich gebildeten CuO vorgenommen (Kurve IX). Auf solche Messungen wird auf S. 116 noch genauer eingegangen. In poliertem Zustand zeigt sich kein Frequenzgang von $R_A F$, was nach den im folgenden vorgenommenen Überlegungen darauf zurückgeführt wird, daß die an der Kontaktierung auftretenden Schichten niedriger spezifischer Leitfähigkeit sehr schmal sind.

²⁹⁾ Die C_A -Werte nach 4-tägiger Alterung ohne Kontaktierung, also an Luft in Abb. 8, sind übrigens nur $1/2$ – $1/3$ so groß wie sofort nach dem 5. Polieren, deuten also auf die Abwesenheit einer sonst schon sofort nach der Kontaktierung, vielleicht im Sinne einer physikalischen Sperrsicht, auftretenden hochohmigen Randschicht hin. Man könnte vielleicht daran denken, dies auf eine Sauerstoffanreicherung der Oberflächenschicht beim Lagern an der freien Oberfläche zurückzuführen. Da auch diese Scheiben nach längeren Kontakt mit der aufgedampften Silberschicht hochohmige Randschichten ausbilden, wird man in diesem wie in den anderen Fällen die Annahme einer Getterwirkung des Ag auf die Sauerstoffüberschuß-Störstellen des Cu_2O kaum umgehen können.

Diskutiert man den Frequenzgang von R_A und C_A an einem Ersatzschema der Abb. 10, das in ganz grober Annäherung die Scheinwiderstandsverhältnisse bei Vorliegen eines breiten gut leitenden Gebietes und schmaler Schichten schlechter Leitfähigkeit wiedergeben dürfte, so zeigt sich, daß

$$\text{bei genügend tiefen Frequenzen, } \omega < \frac{1}{R_1 C_1} < \frac{1}{R_2 C_2}, \quad (5a)$$

R_A frequenzunabhängig wird, und zwar gleich dem Gesamtwiderstand des Gebildes

$$R_A = R_1 + R_2, \quad (5b)$$

und daß bei Steigerung der Frequenz R_A frequenzabhängig wird, abfällt und für³⁰⁾

$$\omega > \frac{1}{R_2 C_1} \quad (6a)$$

wieder in einen frequenzabhängigen Wert

$$R_A = R_2 \quad (6b)$$

übergeht. An dieser Stelle ist C_A , das unterhalb (5a) frequenzunabhängig ist³¹⁾, und dann abzufallen beginnt, noch frequenzabhängig und wird erst für

$$\omega > \frac{1}{R_2 \sqrt{C_1 C_2}} \quad (7a)$$

frequenzunabhängig³²⁾, und zwar gilt dann

$$\frac{1}{C_A} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}. \quad (7b)$$

Eine Anwendung dieser Ergebnisse auf die durchgemessenen Scheiben zeigt, daß das R_A bei 100 KHz, wenn es dort frequenzunabhängig geworden ist³³⁾, den Widerstand (R_2) des eigentlichen Cu_2O im Innern ohne die alternden schlecht leitenden Schichten an der Kontaktierung darstellt³⁴⁾. Aus den R_A -Werten bei

³⁰⁾ Im Falle $R_1 < R_2$ müssen die Bedingungen (5a) und (6a) vertauscht werden, es ist dann $\frac{1}{R_2 C_1} < \frac{1}{R_1 C_1}$.

³¹⁾ Im Gebiet (5a) ist

$$C_A = \frac{R_2^2 C_1 + R_1^2 C_2}{(R_1 + R_2)^2}.$$

Dies wird gleich C_1 , wenn $R_1 > R_2$, d. h., wenn die schmale Schicht den Hauptanteil des Widerstandes liefert.

³²⁾ Für $R_1 < R_2$ ist $\omega > \frac{1}{R_1 \sqrt{C_1 C_2}}$ zu setzen.

³³⁾ Wenn in Abb. 9 bei der polierten Scheibe L3 das R_A auch bei niederen Frequenzen in logarithmischer Auftragung keinen merklichen Gang mehr aufweist, so bedeutet dies bei dem gleichzeitig vorhandenen Frequenzgang von C_A nur, daß die Breite der schlecht leitenden Schichten so klein ist, daß ihr Widerstand trotz ihrer geringeren spezifischen Leitfähigkeit gegenüber dem Gesamtwiderstand vernachlässigbar wird ($R_1 < R_1 + R_2$).

³⁴⁾ Bei den in Abb. 9 angeführten Messungen z. B. zeigt sich, daß in den meisten Fällen der Frequenzgang bei 100 KHz schon sehr schwach geworden ist, so daß wahrscheinlich R_A bei noch höheren Frequenzen völlig frequenzunabhängig werden dürfte und somit den Wert bei 100 KHz nur noch wenig unterschreiten wird.

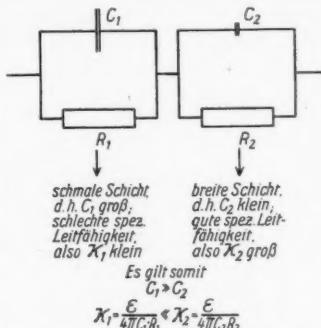


Abb. 10. Vereinfachtes Ersatzschema für Massivscheiben mit Kontaktierungswiderständen

100 KHz, der Dicke und der Kontaktierungsfläche der Scheiben kann daher unter der Annahme, daß, wie noch gezeigt werden wird, die schlechtleitenden Schichten im Verhältnis zur Gesamtdicke vernachlässigbar schmal sind, die Leitfähigkeit des eigentlichen Cu_2O im Innern errechnet werden. Hiervon wird in § 6 Gebrauch gemacht, wo aus den R_A -Werten bei verschiedenen Temperaturen die Leitfähigkeit, die Aktivierungsenergie und der Störstellengehalt berechnet wird.

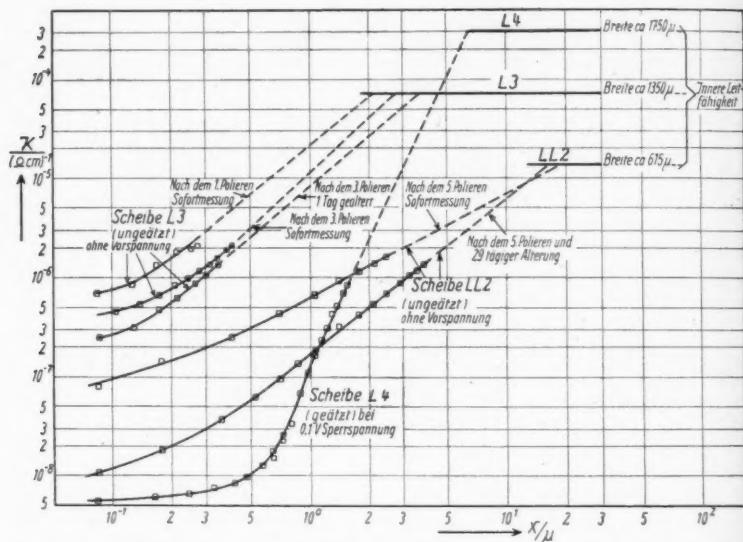


Abb. 11. Randleitfähigkeit und Leitfähigkeit im Innern einer geätzten, unpolierten und einer ungeätzten, polierten l -Scheibe, sowie einer ungeätzten, polierten ll -Scheibe bei 195°K (bilogarithmische Auftragung)

Daß es sich wirklich nur um schmale Gebiete schlechter Leitfähigkeit handelt, kann außer einer Abschätzung auf Grund von (6a), in welcher die Dicke x_k der schlecht leitenden Schichten auf Grund der Beziehung:

$$x_k = \frac{\epsilon F}{4 \pi C_1} \quad (8)$$

zu bestimmen ist, aus der oben geschilderten „Leitfähigkeitsanalyse“ im Sinne von Lebovec geschlossen werden, der wir uns nunmehr zuwenden.

In Abb. 11 sind die $\square \square \square$ -Kurven einer bei 195°K in verschiedenen Alterungsstadien gemessenen ll -Scheibe, (ll 2) einer l -Scheibe (L 3) in verschiedenen Abpolier- und Alterungsstadien und einer weiteren l -Scheibe (L 4), bei welcher das oberflächlich bei der Glühung entstandene CuO durch Ätzen entfernt war, gezeigt. Außerdem sind noch die aus den R_A -Werten bei 100 KHz ermittelten Leitfähigkeiten des Cu_2O -Inneren angegeben. Eine Extrapolation³⁵⁾ der $\square \square \square$ -Kurven

³⁵⁾ Es wurde hierbei in einem $\log \kappa$, $\log x$ -Diagramm linear extrapoliert, eine lineare Extrapolation im $\log \kappa$, x -Diagramm hatte noch kleinere Werte ergeben.

bis zu dieser Leitfähigkeit zeigt, daß die Gesamtbreite der schlecht leitenden Schichten bei polierten ll -Scheiben³⁶⁾ etwa 20μ , bei polierten l -Scheiben etwa $2-4\mu$ und bei der geätzten l -Scheibe etwa 6μ beträgt. Diese Werte stimmen mit den erwähnten Abschätzungen nach (6a) und (8) wenigstens größenordnungsmäßig überein, wo sich unter Berücksichtigung dessen, daß meist völlige Konstanz von R_A bei 100 KHz noch nicht erreicht ist, für $LL\ 2$ ein $x_k \leq 30\mu$ für eine l -Scheibe ($L\ 1$) ein $x_k \leq 2\mu$ und für $L\ 4$ ein $x_k \approx 4-5\mu$ ergibt. Für eine n -Scheibe kann man vielleicht $x_k \approx 0,8\mu$ setzen.

Auf jeden Fall ist ohne weiteres ersichtlich, daß die Breite der schlecht leitenden Gebiete vernachlässigbar klein gegenüber der Gesamtbreite der Scheiben ist, so daß ohne großen Fehler bei der Errechnung der spezifischen Leitfähigkeit der Hauptgebiete die Gesamtbreite statt der genauen Breite der Hauptgebiete verwendet werden kann.

Die $\square\square\square$ -Kurven der Abb. 11 geben allerdings nur ein mehr qualitatives Bild der Leitfähigkeitsschichtung. Die nicht angeführten zugehörigen $\bigcirc\bigcirc\bigcirc$ -Kurven lagen nämlich häufig im ganzen Meßbereich unter den $\square\square\square$ -Kurven. Es besagt dies voraussichtlich, daß man sich noch im Gebiet einer Anfangsstörung befindet. Man muß auch die Möglichkeit ins Auge fassen, daß sich ein Gebiet annähernd konstanter (hoher) Leitfähigkeit anschließt, so daß $\bigcirc\bigcirc\bigcirc$ - und $\square\square\square$ -Kurve bei weiterer Frequenzsteigerung einen Verlauf nach Abb. 5 zeigen würden. In jedem der genannten Fälle verläuft aber die $\square\square\square$ -Kurve gegenüber der Wirklichkeit eher zu flach als zu steil und eher bei zu hohen Leitfähigkeiten als bei zu niedrigen. Zum mindesten wird, wenn auch nicht die $\bigcirc\bigcirc\bigcirc$ -Kurve, so doch die $\square\square\square$ -Kurve ein ungefähres Bild von der spez. Leitfähigkeit innerhalb der erfaßten Schichtbreiten liefern.

Ob außer der erwähnten durch die Kontaktierung bedingten Leitfähigkeitschichtung noch eine ähnlich ausgesprochene im Innern auftritt, konnte nicht einwandfrei festgestellt werden, erscheint aber unwahrscheinlich. Aus der Leitfähigkeitsanalyse der Sofortmessung läßt sich höchstens bei freihängend geglühten Scheiben auf eine schwache Abnahme der Leitfähigkeit vom Rande nach innen, bei den auf der Korundplatte geglühten Scheiben auf eine schwache Zunahme zumindest von dem einen Rande aus (wahrscheinlich von dem bei der Glühung aufliegenden) schließen³⁷⁾. Ähnliche Ergebnisse liefert eine Auftragung der 100 KHz-Werte in verschiedenen Abpolierstadien in Abhängigkeit von der jeweiligen Scheibendicke³⁸⁾. Man erkennt in Abb. 12, daß bei der freihängend geglühten Scheibe $L\ 3$, die immer beidseitig abpoliert wurde, die Verbindungsline der Meßpunkte, wenn man von dem ersten absieht, die R_A -Achse praktisch im Nullpunkt, evtl. etwas oberhalb desselben schneidet, was auf einen homogenen oder einen nach innen schwach zunehmenden spezifischen Widerstand hindeuten könnte. Der Sprung bei der ersten Abpolierung wird durch die Entfernung des CuO hervorgerufen.

³⁶⁾ Es handelt sich bei der hier besprochenen $LL\ 2$ um eine auf Korund geglühte Scheibe. Bei freihängend geglühten ll -Scheiben wäre x_k vielleicht kleiner.

³⁷⁾ Die $\square\square\square$ -Kurven der Leitfähigkeitsanalysen der Sofortmessungen liegen nämlich bei der freihängend geglühten Scheibe $L\ 3$ mit fortschreitender Abpolierung in ihrer Gesamtheit bei immer niedrigeren α -Werten, bei der auf Korund aufliegenden Scheibe $L\ 1$ mit fortschreitender Abpolierung bei immer höheren α -Werten.

³⁸⁾ Die Scheibendicke wurde hierbei aus dem Gewicht unter der Annahme eines spezifischen Gewichtes von 6 für Cu_2O und einer gleichmäßigen Abtragung (welch letzteres allerdings nicht genau zutrifft) ermittelt.

Bei einer auf Korund aufliegend geblühten Scheibe (ebenfalls Abb. 12) zeigte sich, daß eine nur auf einer Seite vorgenommene Abpolierung den R_A -Wert praktisch nicht veränderte. Es scheint hier die andere, wahrscheinlich die bei der Glühung aufliegende Seite, die höherohmige und bestimmende zu sein.

Man könnte im übrigen daran denken, im Cu_2O -Inneren eine wellenförmige Leitfähigkeitsschichtung wie z. B. in Abb. 6c anzunehmen, die nach den Ausführungen von § 3 S. 108 ja bei der Leitfähigkeitsanalyse ähnliche Kurven wie die gemessenen ergeben würde. Zu dieser Annahme würde man gelangen, wenn man bei der Abkühlung die Entstehung (evtl. fein dispers verteilter) Abscheidungen schlecht leitenden Materials im Cu_2O -Inneren in Betracht zieht. Die Alterungerscheinungen schließen zwar die wellenförmige Leitfähigkeitsverteilung

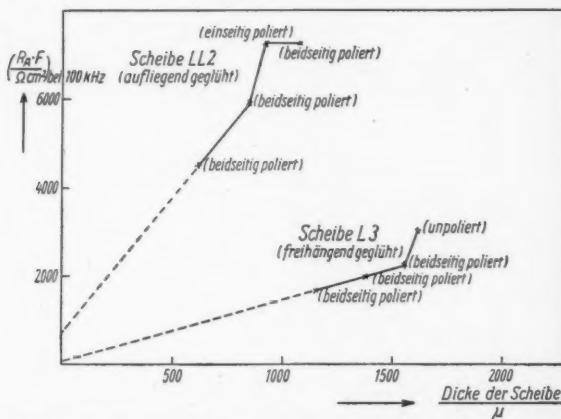


Abb. 12. Widerstand eines cm^2 der massiven Scheibe LL2 und der massiven Scheibe L3 bei 195°K und 100 kHz in Abhängigkeit von der Schichtdicke

nicht mit Sicherheit aus, zeigen aber, daß die Leitfähigkeitskurven hauptsächlich durch Kontaktierungswiderstände geformt werden. Auch sonst deutet nichts auf eine derartige wellenförmige Leitfähigkeitschichtung im Cu_2O -Inneren hin.

Von Interesse dürfte vielleicht noch sein, daß, wie schon erwähnt, ebenfalls Messungen an unpolierten Scheiben mit oberflächlicher CuO -Schicht vorgenommen wurden. Es zeigte sich immer, wie in Abb. 9, daß dann besonders hochohmige Schichten festgestellt werden konnten. Das gleichzeitige Auftreten einer Alterung und einer starken Vorspannungsabhängigkeit deutet auf Randverarmungsgebiete hin, die entweder an der Grenze $\text{CuO}/\text{Cu}_2\text{O}$ oder CuO/Ag lokalisiert sein könnten.

§ 6. Messungen der spezifischen Leitfähigkeit und ihres Temperatur-Koeffizienten

Nachdem sich oben ergeben hatte, daß die R_A -Werte bei 100 kHz bei den meisten Zellen weitgehend den Widerstand der Scheiben abzüglich der schmalen, anscheinend durch die Kontaktierung bedingten Schichten niedriger Leitfähigkeit darstellen, erschien es angebracht, aus ihnen die spezifischen Leitfähigkeiten der

zeigte
t prak-
bei der
örmige
n Aus-
Kurven
, wenn
bschei-
t. Die
teilung

massiven
cke
ächlich
chts auf
n.
benfalls
ommen
ohmige
lterung
sgebiete
önnten.

ur-
bei den
mäler,
higkeit
ten der

Hau
Mess
pera
tiere

Abb. 1

In
keiten
nung

Hauptschichten des Cu_2O zu errechnen. Desgleichen konnte daran gedacht werden, Messungen auch noch bei höheren Temperaturen vorzunehmen, um den Temperaturkoeffizienten, den Störstellengehalt und die Aktivierungsenergie diskutieren zu können.

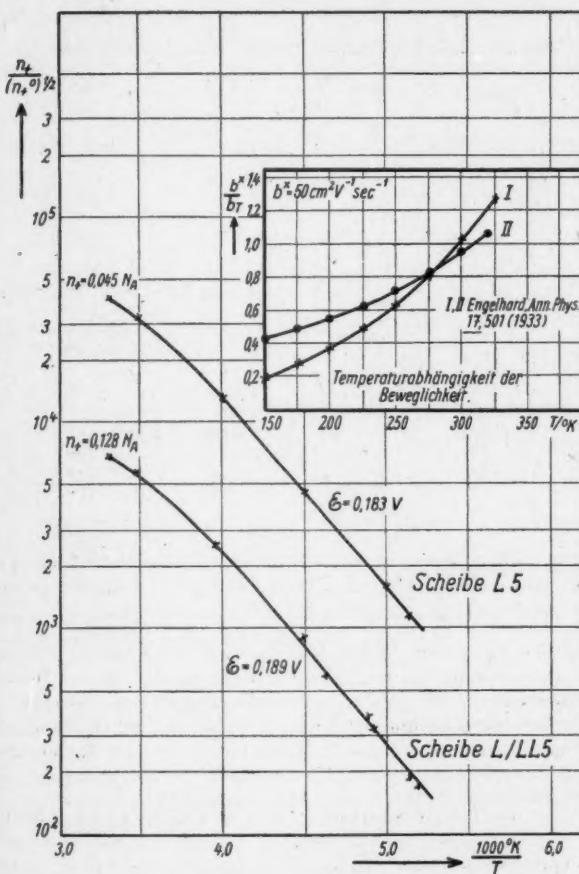


Abb. 13. Temperaturabhängigkeit des Ausdrucks $\frac{n_+}{(n_+^0)^{1/2}}$ bei den massiven Scheiben L 5 und L/LL 5 mit Beweglichkeits-Kurve I.
 n_+ = Defektelektronenkonzentration, n_+^0 = Entartungskonzentration

In Tabelle 1 sind die aus den R_A -Werten ermittelten spezifischen Leitfähigkeiten für die Temperaturen 195°K und 303°K angegeben. Bei der Errechnung wurde die Formel $\varkappa = \frac{l}{R_A F}$ verwendet, wobei für l die gesamte durch Wä-

Tabelle
 \mathcal{E} , N_A , n_A und n_{A^*} -Werte

Zellen-Sorte		\mathcal{E}/V		N_A/cm^{-3}	
Abkühlungsart	Bezeichnung	Beweglichkeitskurve I	Beweglichkeitskurve II	Beweglichkeitskurve I	Beweglichkeitskurve II
<i>n</i> -Scheiben	<i>N</i> 8 (<i>SI</i>) <i>N</i> VIII <i>N</i> IX				
	(<i>SI</i>) <i>N</i> X			$1-2 \cdot 10^{15}$ aus $\frac{dU}{dI/C^2}$	
	(<i>NA</i>) <i>N</i> XI			$3-5 \cdot 10^{15}$ aus $\frac{dU}{dI/C^2}$	
<i>n</i> -Gleichrichter	<i>N</i> VII			$3-9 \cdot 10^{15}$ aus $\frac{dU}{dI/C^2}$	
	(<i>NA</i>) <i>L</i> 9	0,240	0,215	$1,6 \cdot 10^{17}$	$19 \cdot 10^{16}$
	<i>L</i> 1 <i>L</i> 5	(0,162) 0,183	(0,15) 0,163	$(1,7 \cdot 10^{15})$ $4,6 \cdot 10^{15}$	$(1,2 \cdot 10^{16})$ $1,0 \cdot 10^{15}$
<i>l</i> -Scheiben	<i>L</i> III			$5 \cdot 10^{14}$ aus $\frac{dU}{dI/C^2}$	
<i>l</i> -Gleichrichter	<i>L/LL</i> 5	0,189	0,169	$2,7 \cdot 10^{14}$	$5,6 \cdot 10^{13}$
	<i>LL</i> 6	0,186	0,162	$6,9 \cdot 10^{14}$	$9,4 \cdot 10^{13}$
	<i>LL</i> 2	(0,220)	(0,191)	$(6,3 \cdot 10^{14})$	$(5,3 \cdot 10^{14})$
	<i>LL</i> 7	(0,185)	$>0,161$	$(4,1 \cdot 10^{14})$	$(6,6 \cdot 10^{13})$
<i>u</i> -Scheiben					

gung bestimmte Schichtdicke eingesetzt war, was kein großer Fehler ist, denn die nicht berücksichtigten Schichten niederer Leitfähigkeit betragen ja immer nur wenige Prozente der Gesamtdicke.

Zum Vergleich mit diesen Ergebnissen an massiven Scheiben sind auch noch spezifische Leitfähigkeiten des neutralen Cu_2O angegeben, die aus Messungen bei hohen Flussspannungen an Gleichrichterscheiben gewonnen wurden. Letztere liegen durchweg tiefer. Im übrigen weisen Scheiben aus NA-Material mindestens bei tiefen Temperaturen eine geringere Leitfähigkeit auf als Scheiben aus CCC-Kupfer.

Zur Kenntnis des Temperaturganges wurde in Tabelle 1 und Abb. 13 und 14 nicht die spez. Leitfähigkeit selbst gewählt, sondern die mit Hilfe gemessener Beweglichkeitswerte aus ihr ermittelte Defektelektronendichte n_A und gewisse daraus berechnete Konstanten. Hierbei wurde von der Annahme Gebrauch gemacht, daß die Anzahl n_A der Leitungs-Defektelektronen in einem das Massenwirkungsgesetz befolgenden Gleichgewichtszustand mit den Störstellen steht. Bezeichnet man mit N_A die Gesamtkonzentration der Defektelektronen abspaltenden Störstellen (Akzeptoren), mit n_{A^-} die Konzentration der dissozierten, n_{A^*} der undissozierten Störstellen, so gilt:

$$\frac{n_A n_{A^-}}{n_{A^*}} = K_A. \quad (9)$$

1 verschiedener Zellen

n_+/cm^{-3} bei 300°K		$\frac{x_{90^\circ\text{K}}}{(\Omega \text{ cm})^{-1}}$	$\frac{x_{\text{ca. } 190^\circ\text{K}}}{(\Omega \text{ cm})^{-1}}$	Bemerkung
Beweglichkeitskurve I	Beweglichkeitskurve II			
$>1 \cdot 10^{15}$	$>9 \cdot 10^{14}$	$>7,8 \cdot 10^{-3}$ $4 \cdot 10^{-3}$ $4,5 \cdot 10^{-3}$ $3,07 \cdot 10^{-3}$ $1,2 \cdot 10^{-3}$ $6 \cdot 10^{-3}$	$>8,8 \cdot 10^{-4}$ $4 \cdot 10^{-4}$ $2,5 \cdot 10^{-5}$	freihängend
$1,74 \cdot 10^{14}$	$1,61 \cdot 10^{14}$	$1,3 \cdot 10^{-3}$	$1,8 \cdot 10^{-6}$	freihängend
$>2,6 \cdot 10^{14}$ $2,08 \cdot 10^{14}$	$>2,4 \cdot 10^{14}$ $1,92 \cdot 10^{14}$	$>2,0 \cdot 10^{-3}$ $1,56 \cdot 10^{-3}$ $>5 \cdot 10^{-4}$	$>2,6 \cdot 10^{-4}$ $1,32 \cdot 10^{-4}$ $>5 \cdot 10^{-6}$	NA -Kupfer auf Korund freihängend
$3,4 \cdot 10^{13}$	$3,2 \cdot 10^{13}$	$2,58 \cdot 10^{-4}$	$1,6 \cdot 10^{-5}$ $3,3 \cdot 10^{-5}$	freihängend
$>4,4 \cdot 10^{13}$ $5,3 \cdot 10^{13}$	$>4 \cdot 10^{13}$ $4,9 \cdot 10^{13}$	$>3,0 \cdot 10^{-4}$ $3,9 \cdot 10^{-4}$	$>1,3 \cdot 10^{-5}$ $2,8 \cdot 10^{-5}$	freihängend auf Korund auf Korund

wobei K_A aus der Entartungskonzentration $n_+^0 = 2,5 \cdot 10^{19} \cdot \left(\frac{T}{300}\right)^{1/2}$ und der Aktivierungsenergie E_A berechnet werden kann. Es gilt $K_A = n_+^0 e^{-\frac{E_A}{kT}}$, und unter Berücksichtigung der Quasineutralität folgt:

$$n_+ = (N_A^- n_+)^{1/2} (n_+^0)^{1/2} e^{-\frac{\epsilon}{2\beta}}; \quad \mathfrak{B} = \frac{k T}{e}, \quad \mathfrak{E} = \frac{E_A}{2}. \quad (10)$$

ξ bedeutet hierbei die für den Temperaturgang des Ausdrucks $n_+/(n_+^0)^{1/2}$ direkt maßgebende „Aktivierungsenergie“, denn für nicht zu starke Dissoziation, d. h. für $n_+ \ll N_A$, gilt nach (10):

$$\ln \frac{n_+}{(n_+^0)^{1/2}} = \frac{1}{2} \ln N_A - \frac{e \mathcal{E}}{k T}. \quad (11)$$

Im Gegensatz dazu bezeichnen wir E_A als „Ablösungsenergie“ der Störstelle A .

Nach (11) muß $\ln \frac{n_+}{(n_0^0)^{1/2}}$ als Funktion von $1/T$ aufgetragen eine Gerade ergeben. Eine Extrapolation bis $1/T = 0$ liefert einen Abschnitt auf der $\ln \frac{n_+}{(n_0^0)^{1/2}}$ -Achse, welcher gleich $\ln N_+^{1/2}$ ist.

Zur Berechnung der n_+ -Werte aus den spez. Leitfähigkeiten wurden wahlweise zwei der von Engelhard³⁹⁾ angegebenen Kurven der Temperaturabhängigkeit der Beweglichkeit verwendet, eine Kurve mit starker und eine mit schwacher Temperaturabhängigkeit (siehe Abb. 13).

In Abb. 13 ist die Temperaturabhängigkeit des $\ln \frac{n_+}{(n_+^0)^{1/2}}$ für je eine bestimmte L - und U -Scheibe (L 5 und $L/LL5$) unter Verwendung der Beweglichkeitskurve I,

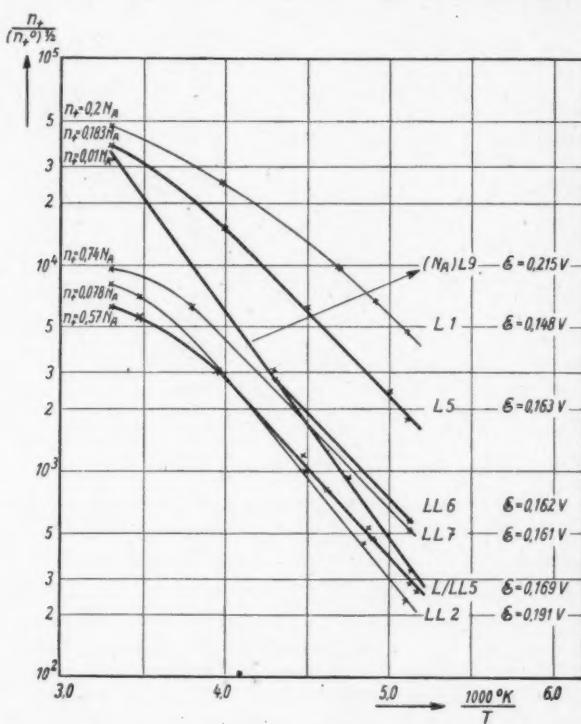


Abb. 14. Temperaturabhängigkeit des Ausdrucks $\frac{n_+}{(n_+^0)^{1/2}}$ bei einigen massiven Scheiben mit Beweglichkeitskurve II.

n_+ = Defektelektronenkonzentration, n_+^0 = Entartungskonzentration

in Abb. 14 unter Verwendung der Beweglichkeitskurve II gezeigt. Unter Verwendung von II sind dort auch noch weitere $\frac{n_+}{(n_+^0)^{1/2}}$ -Kurven für andere Scheiben eingetragen⁴⁰⁾. Man erkennt, daß bei hohen Temperaturen Abweichungen in

³⁹⁾ E. Engelhard, Ann. Physik 17, 501 (1933).

⁴⁰⁾ Bei den dünn ausgezogenen Kurven sind die Meßpunkte unzuverlässig, weil R_A bei 100 KHz noch nicht konstant geworden war.

wahl-
ingig-
acher
mmte
rve I,

der Linearität auftreten. In Abb. 14 könnte man diese Abweichungen evtl. auf erschöpfende Dissoziation zurückführen, d. h. darauf daß n_+ in Gl. (10) nicht mehr vernachlässigbar gegenüber N_A ist. Aus der oben geschilderten Extrapolation ergeben sich nämlich für Abb. 14 Werte von N_A , die sich fast alle nur noch um weniger als eine Zehnerpotenz von n_+ bei der höchsten Meßtemperatur (303° K) unterscheiden. Das Verhältnis von n_+ zu N_A ist an den 303°-Punkten jeweils angegeben. Allerdings decken sich die in Abb. 14 eingezeichneten Kurven auch dann nicht völlig mit der Berechnung, wenn man statt (11) die auch für $n_+ \sim N_A$ gültige Gl. (10) benutzt; das kann man vielleicht auf geringe Ungenauigkeiten entweder im Legen der Kurve oder in der Beweglichkeit zurückführen. Jedenfalls erscheint es möglich, eine Deutung der Abbiegung auf Grund von erschöpfender Dissoziation bei der Verwendung einer Beweglichkeitskurve, die ein wenig von II abweicht, in Betracht zu ziehen. Im übrigen könnte man vielleicht auch ebenso wie bei Engelhard das gleichzeitige Auftreten zweier verschiedener Akzeptorenarten erörtern; ferner bestehen beim Auftreten positiv geladener Störstellen (als Gift- oder Haft-Stellen) verschiedene Möglichkeiten des Überganges von einem stärkeren Temperaturgang bei tieferer Temperatur zu einem schwächeren bei höherer Temperatur. Diese Frage kann wohl nur durch Diskussion des gesamten in der bisherigen Literatur vorliegenden Materials und weitere ad hoc durchgeführte Untersuchungen, unter Zuhilfenahme von Halleffektmessungen, geklärt werden, wobei besonders bei höheren Temperaturen eine Technik, die die zeitlichen Veränderungen des Störstellengehaltes auf ein Minimum reduziert, unumgänglich erscheint. Immerhin liefern unsere Untersuchungen zum Verhalten des relativ sauerstoffreichen Cu_2O bei tiefen Temperaturen einen weiteren Beitrag.

Bei Benutzung der Beweglichkeitskurve I wird übrigens eine Deutung des Abbiegens als Erschöpfung etwas gezwungener; beim Vergleich der Kurven für L 5 ergibt sich z. B., daß nur bei Verwendung der Beweglichkeitskurve II ein dem starken Abbiegen einigermaßen entsprechender hoher $\frac{n_+}{N_A}$ -Wert errechnet wird.

In Tabelle 1 sind die Aktivierungsenergie \mathcal{E} und die N_A -Werte, die sich aus der $\ln \frac{n_+}{(n_+^0)^{1/2}} - \left(\frac{1}{T}\right)$ -Abhängigkeit für beide Beweglichkeitskurven ergeben, bei allen durchgemessenen Scheibensorten angegeben.

Bei den in Klammern angeführten Werten für \mathcal{E} und N_A wurden die R_A -Werte bei 100 KHz noch nicht völlig konstant, so daß die jeweiligen n_+ -Werte u. U. noch höher liegen können als angesetzt. Dies kann insbesondere die Bestimmung der Aktivierungsenergie und des Störstellengehaltes merklich falschen.

Es möge noch erwähnt werden, daß es sich bei der Scheibe L 5 und L/LL 5 um dasselbe Ausgangsobjekt handelt. Die normale l-Scheibe L 5 war nur durch Abpolieren der Silberkontakteierung, 30 minutenlange Glühung bei 500° C, Erkalten im Ofen und Neukontaktierung in die ll-Scheibe umgeformt worden. Die Aktivierungsenergie hat sich, wie Tabelle 1 zeigt, bei dieser Umformung nur wenig geändert, der Störstellengehalt ist abgesunken.

Bevorzugt man aus den oben angeführten Gründen die Beweglichkeitskurve II, so würden die Aktivierungsenergien bei CCC-Material um $\mathcal{E} = 0,165$ V herum liegen und nur bei den ungenau bestimmten Scheiben LL 2 und L 1 bis $\mathcal{E} = 0,19$ V und $\mathcal{E} = 0,15$ V streuen. Die NA-Scheibe hat offensichtlich eine höhere Aktivierungsenergie ($\mathcal{E} = 0,22$ V), was sich auch in der verminderten Leitfähigkeit bei tiefen Temperaturen äußert. Ein auf Erschöpfung deutendes Abbiegen ist hier

in Übereinstimmung mit $n_+ \ll N_A$ unter Berücksichtigung der Ungenauigkeit praktisch nicht vorhanden (Abb. 14). Mit Beweglichkeitskurve I ergäben sich Aktivierungsenergien von etwa $\mathcal{E} \approx 0,19$ V bei CCC-Material, von $\mathcal{E} = 0,24$ V bei NA-Material.

Von Engelhard⁴¹⁾ wurden unter der Annahme des gleichzeitigen Vorkommens zweier Akzeptorenarten mit verschiedener Aktivierungsenergie in dem Temperaturbereich von 150° K bis 320° K zwei Werte ausgerechnet, $\mathcal{E}_2^x = 0,18$ V bis 0,19 V und $\mathcal{E}_1^x = 0,35$ V bis 0,36 V. Die von Engelhard ausgewerteten \mathcal{E} -Werte unterscheiden sich von den hier berechneten dadurch, daß in ihnen nicht der Temperaturgang von n_+^0 berücksichtigt ist. Berücksichtigt man diesen, so sinkt der Engelhardsche Wert $\mathcal{E}_2^x = 0,18$ V auf $\mathcal{E}_2 = 0,165$ V und $\mathcal{E}_1^x = 0,36$ V auf $\mathcal{E}_1 = 0,35$ V. \mathcal{E}_2^x bei Engelhard ist somit in Übereinstimmung mit dem hier gefundenen $\mathcal{E} = 0,165$ V.

Daß Scheiben aus NA-Kupfer eine höhere Aktivierungsenergie besitzen, kann bei der geringen Reinheit des NA-Kupfers vielleicht auf eine Umsetzung der ursprünglichen Störstellen mit Fremdmetall zurückgeführt werden. Zu vermerken ist übrigens auch, daß bei der NA-Scheibe der Störstellengehalt etwas höher liegt.

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß bei Scheiben aus CCC-Kupfer eine Aktivierungsenergie $\mathcal{E} \approx 0,165$ V wahrscheinlich erscheint, die weitgehend unabhängig von den Abkühlungsbedingungen ist und einer Ablösungsenergie $E_A = 2\mathcal{E} = 0,33$ V entsprechen würde. Langsamere Abkühlung⁴²⁾ bewirkt eine Herabsetzung des Störstellengehaltes und damit der Leitfähigkeit, ohne daß die Aktivierungsenergie, und damit die Störstellenart, sich merklich zu ändern scheint. Bei Gleichrichterzellen liegen die Neutral-Leitfähigkeiten und Störstellengehalte (insofern deren Bestimmungsmethoden einwandfrei sind) tiefer als bei durchoxydierten Scheiben. Vielleicht läßt sich dies, wie auch von Waibel⁴³⁾ angenommen wurde, auf eine Getterwirkung des Mutterkupfers für die A-Störstellen zurückführen.

Zusammenfassung

In Teil I der vorliegenden Arbeit wird im Zuge einer größeren Untersuchung über das Scheinwiderstandsverhalten von Cu_2O -Gleichrichtern über Messungen des Scheinwiderstandes an massiven Cu_2O -Scheiben berichtet und dabei eine späterhin auch für die Diskussion des Gleichrichterverhaltens wichtige Auswertemethode von Lebovec geschildert, nach der aus dem Gang des Scheinwiderstandes mit der Frequenz die Leitfähigkeitsverteilung in den Scheiben bestimmt werden kann.

Der Anlaß für Messungen an massivem Material war, daß bei gealterten Gleichrichterscheiben durch Abpolieren der Graphit-, bzw. Silberkontakteierung und Neukontaktierung das Scheinwiderstandsverhalten der Scheiben und insbesondere die sich nach der Lebovec-Auswertung ergebende Leitfähigkeitsverteilung beträchtlich geändert werden konnte. Es wurde daher an massivem Material die geeignete Herstellung einer Kontaktierung ausprobiert. Auch bei dieser „sperrfreien“ Kontaktierung treten schmale Gebiete niederer spezifischer Leitfähigkeit

⁴¹⁾ E. Engelhard, I. c. insbesondere S. 525.

⁴²⁾ Siehe auch W. Feldman, Physic. Rev. **64**, 113 (1943).

⁴³⁾ F. Waibel, Z. techn. Physik **16**, 366 (1935).

auf, wobei allerdings vielleicht durch mehrtägiges Lagern der frischen Oberflächenschichten an Luft der Anfangswert des nach der Silberkontakteierung beobachteten Widerstandes dieser hochohmigen Schichten erheblich herabgesetzt werden kann. Nach längerem Kontakt mit der Silberschicht treten aber in beiden Fällen erhöhte Schmalschicht-Widerstände auf, die überdies von einer angelegten Gleichspannung beeinflußt werden. Sie dürften demnach wohl durch einen Einfluß der Silberkontakteierung auf den Störstellengehalt der nächstbenachbarten Schichten zu deuten sein.

Aus dem Scheinwiderstand bei 100 KHz wurden Rückschlüsse auf die Leitfähigkeit des eigentlichen Cu_2O -Inneren gezogen und mittels Messungen in verschiedenen Abpolierstadien festgestellt, daß zum mindesten bei freihängend geglühten Scheiben keine starke, sich über breite Gebiete erstreckende Leitfähigkeitsvariation im Innern auftritt.

Darüber hinaus wurde der Versuch gemacht, die Aktivierungsenergie und den Störstellengehalt aus dem Temperaturkoeffizienten des Halbleiterinneren zu ermitteln. Es ergab sich, daß man bei der Verwendung einer bestimmten Cu-Sorte als Ausgangsmaterial für die Herstellung mit einer auch nach den Messungen von Engelhard errechneten Aktivierungsenergie $E = 0,165$ V, bzw. $E_A = 2E = 0,33$ V den Temperaturgang deuten kann.

Eine Verlangsamung der Abkühlung nach der Glühung bei der Herstellung scheint zwar den Störstellengehalt zu vermindern, jedoch nicht die Aktivierungsenergie zu beeinflussen. Bei Verwendung einer verunreinigten Cu-Sorte führte die Deutung auf $E = 0,215$ V, bzw. $E_A = 0,43$ V.

Herrn Professor W. Schottky verdanke ich die Anregung zu der Untersuchungsreihe, über deren ersten Teil hier berichtet worden ist, sowie vielfache Unterstützung bei der Diskussion der gewonnenen Ergebnisse.

Auch Herrn Dr. Spenke möchte ich für Diskussionen und Herrn Dr. Reinbach für die Herstellung der Scheiben, ihre Kontaktierung und mechanische Behandlung danken.

Pretzfeld (Oberfranken), Siemens-Schuckertwerke.

(Bei der Redaktion eingegangen am 5. Januar 1951.)

Zur Frage der Widerstandsschichtung in Kupferoxydul-Gleichrichtern. II Untersuchungen an Gleichrichterscheiben

Von Frank Rose

(Mitteilung der Dienststelle Pretzfeld der Siemens-Schuckertwerke)

(Mit 14 Abbildungen)

Inhaltsübersicht

Es wird über Scheinwiderstandsmessungen bis 100 KHz an Cu₂O-Gleichrichtern berichtet. Die Messungen wurden bei Temperaturen von etwa 195° K bis 303° K vorgenommen und an Gleichrichtern, die aus verschiedenem Ausgangsmaterial und unter varierten Abkühlungsbedingungen hergestellt waren, ausgeführt. Die in Teil I beschriebene Leitfähigkeitsanalyse nach der Methode von K. Lebovec wird auf die Messungen angewendet.

§ 1. Einleitung

Nachdem in Teil I die verwendete Meßapparatur und die angewendete Leitfähigkeitsanalyse geschildert, desgleichen die Leitfähigkeitsschichtung im Innern und an der Kontaktierung massiver Cu₂O-Scheiben diskutiert worden war, möge nun auf Scheinwiderstandsmessungen an Gleichrichterscheiben eingegangen werden.

Es wurde schon nebenbei in Teil I erwähnt, daß auch bei Gleichrichterscheiben, obwohl die darin auftretenden Randverarmungsgebiete keine Festschichten sind, der Versuch gemacht worden ist, die Lebovec'sche Leitfähigkeitsanalyse anzuwenden. Das Ergebnis eines der ersten dieser Versuche, nämlich die Leitfähigkeitsanalysen eines geätzten, graphitierten CCC-Gleichrichters bei 303° K und verschiedenen Vorspannungen gibt Abb. 1 wieder. Es zeigt sich, daß über einen weiten Leitfähigkeitsbereich ○○○-Kurve und □□□-Kurve annähernd gleichartig verlaufen und daß das ganze Bild, wenn man in den Kurven, wo sie zusammenfallen, tatsächlich den Leitfähigkeitsverlauf sehen würde, sehr anschaulich den Schottkyschen „Verwehungseffekt“ wiedergibt¹⁾. Unter diesem Effekt versteht man im Sperrgebiet die Vorstellung, daß bei einer Erhöhung der Sperrspannung die Defektelektronenverarmung weiter in das Halbleiterinnere hereinge-

¹⁾ W. Schottky, Z. Physik 113, 367 (1939), insbesondere S. 383. Vgl. auch die in ähnlicher Weise erschlossenen π , χ -Kurven bei G. Pfotzer, Z. Naturforsch. 4a, 691 (1949) Abb. 10.

trieben wird, so daß durch die Verbreiterung der Randverarmungsschicht immer höhere Widerstände auftreten, wodurch die Sperrwirkung hervorgerufen wird²⁾.

Auf Grund des hier gezeigten ermutigenden Ergebnisses wurden Leitfähigkeitsanalysen an einer größeren Anzahl von Gleichrichterzellen unter den verschiedensten Bedingungen ausgeführt. Es zeigte sich jedoch leider, daß die Art der Aufbringung der Kontaktierung von maßgebendem Einfluß auf die Kurvenform der Leitfähigkeitsanalysen sein kann. Es wurden daher erst die Untersuchungen des Teils I eingeschoben, um den Einfluß der Kontaktierung besser beurteilen zu können. In dem hier vorliegenden Teil II werden dann von allen Messungen hauptsächlich diejenigen behandelt werden, bei denen die beste in Teil I untersuchte Kontaktierungsart (Abpolieren und Aufdampfen von Ag im Vakuum) verwendet wurde.

Geschildert werden Messungen und Analysen an Gleichrichterscheiben aus verschiedenem Material und mit verschiedenen Abkühlungsbedingungen bei der Herstellung (n -, l -, ll -Scheiben; s. w. u.).

Da die physikalische Deutung der Meßergebnisse einige Schwierigkeiten bereitet, soll sie in Teil III getrennt behandelt werden.

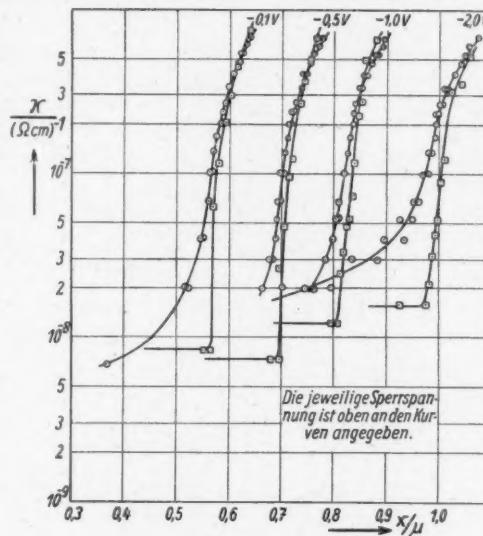


Abb. 1. Darstellung des „Verwehungseffektes“ durch die Leitfähigkeitsanalyse nach der Methode von Le ho vec an einem geätzten Cu_2O -Gleichrichter N I mit Graphitkontakteierung bei verschiedenen Sperrspannungen und bei 303° K

²⁾ Bei Gelegenheit neuerer interner Mitteilungen legt Schottky allerdings Wert auf die Feststellung, daß die in derartigen Kurven, wie auch in der Kapazitätsabnahme mit wachsender Sperrspannung, sich manifestierende Dickenvergrößerung der Erschöpfungsrandsschicht zwar die äußerlich auffallendste, aber nicht die wirksamste Seite des Verwehungseffektes ist. Die Hauptwirkung entsteht vielmehr dadurch, daß die innere Verteilung der (Defekt-) Elektronen innerhalb der Erschöpfungsrandsschicht verändert wird; die Zone mit einer Dichte n ähnlich der Randdichte n_R , die im Rahmen der Diffusionstheorie Hauptträger des Widerstandes ist, erfährt in Sperr- und Flußrichtung relativ viel stärkere Dilatationen und Kontraktionen als die Erschöpfungsschicht als Ganzes. Vgl. hierzu die Kurven bei E. Spekne, Z. Physik **126**, 67 (1949); auch die Tatsache, daß die Mott'sche Leerschichttheorie [Proc. Roy. Soc. London (A) **171**, 27 (1939)], die eine unveränderlich breite Leerzone an Stelle einer veränderbaren raumladungsbedingten Erschöpfungszone annimmt, die Gleichrichterwirkung größtenteils mäßig zu erklären vermag, beruht auf der auch hier wirksamen „inneren Verwehung“ der Teilschicht $n \approx n_R$.

§ 2. Meßobjekte

Die Gleichrichterscheiben für die im folgenden geschilderten Messungen wurden ebenso wie die massiven Scheiben aus runden Cu-Scheiben von etwa 4 cm Außen-durchmesser und 0,1 cm Dicke mit einer inneren Bohrung von etwa 1,4 cm hergestellt. Als Ausgangsmaterial wurde in erster Linie das für Gleichrichterzwecke besonders geeignete CCC-Kupfer der Fertigung vor 1948³⁾ verwendet. Es wurden aber auch Scheiben aus dem Kupfer der Norddeutschen Affinerie (NA-Kupfer) benutzt.

Die Herstellung der Gleichrichter aus dem Ausgangsmaterial geschah auf folgendem Wege:

Die Kupferscheiben wurden zu je 2 Stück mit ihrer mittleren Bohrung in eine Raste eines Stabes aus Chromnickel-Stahl eingehängt und mit dem Stab in einen auf 1000° C eingeregelten Ofen eingeführt. Sie verblieben darin 12 Minuten lang, während welcher Zeit die äußeren Flächen der Scheiben in einer Stärke von 60—100 μ oxydierten, wogegen diejenigen Seiten der Scheiben, welche aneinander lagen, unoxydiert blieben.

Die Scheiben wurden daraufhin mit ihrer Aufhängevorrichtung in einen zweiten Ofen eingebracht, dessen Temperatur 500° C betrug, und dort 30 Minuten belassen. Der Transport von einem Ofen zum andern dauerte höchstens 10 Sekunden und erfolgte durch Luft von Zimmertemperatur. Nach der zweiten Glühung wurde die Abkühlung genau so wie bei den massiven Scheiben in Teil I vorgenommen und zwar wieder auf 3 verschiedenen Wegen:

1. Abkühlung durch Ausschaltung des Ofens (*ll*-Gleichrichter, d. h. sehr langsam abgekühlt),

2. Abkühlung auf der Aufhängevorrichtung an Luft (*l*-Gleichrichter, d. h. langsam abgekühlt),

3. Abschrecken der Scheiben auf der Aufhängevorrichtung in Wasser (*n*-Gleichrichter, d. h. normal abgekühlt⁴⁾).

Die Scheiben besitzen hiernach eine etwa 60—100 μ starke Cu₂O-Schicht mit oberflächlicher CuO-Haut. Die Entfernung der CuO-Haut erfolgte teils nach einer in der Fabrikation verwendeten Ätzvorschrift, teils wie in Teil I durch Abpolieren, worauf jeweils besonders hingewiesen werden wird. Die Kontaktierung wurde ebenfalls bei den einzelnen geschilderten Meßobjekten auf verschiedenem Wege vorgenommen, vor allem wurde aber auch die in Teil I beschriebene und an Hand von Messungen an massiven Cu₂O-Scheiben diskutierte Kontaktierung durch Aufdampfen von Silber verwendet. Sie sei im folgenden mit Ag-Kontaktierung bezeichnet.

³⁾ CCC ist die Abkürzung für Chile Copper Corporation. Dieses Kupfer besitzt einen sehr hohen Reinheitsgrad.

⁴⁾ Es wurde schon in Teil I darauf hingewiesen, daß die Abkühlungsart und Kupfersorte auch in der Benennung der Gleichrichter zum Ausdruck kommt.

Die Buchstaben

LL bedeuten *ll*-Gleichrichter; *L* bedeutet *l*-Gleichrichter; *N* bedeutet *n*-Gleichrichter.

Die verwendete Sorte des Ausgangskupfers wird, wenn es sich nicht um CCC-Kupfer handelt, in Klammern vorangestellt, die Numerierung erfolgt in römischen Zahlen (bei Massiv-Scheiben im Gegensatz dazu in arabischen).

Beispiel: *L III* ist ein *l*-Gleichrichter aus CCC-Kupfer; (*NA*) *N V* ist ein *n*-Gleichrichter aus NA-Kupfer.

§ 3. Untersuchungen an U-Gleichrichtern

Als erstes mögen die Meßergebnisse an U-Gleichrichtern geschildert werden. Bei dieser Abkühlungsart entsteht — wie in Teil I § 6 für massive Scheiben bereits berichtet — auch bei Gleichrichtern ein sehr schlecht leitendes Cu_2O . Deshalb erfaßt in solchen Gleichrichtern die Leitfähigkeitsanalyse besonders breite Gebiete, ohne daß die apparative Frequenzgrenze von 100 KHz überschritten zu werden braucht.

Um eine übersichtliche Zusammenstellung der Scheinwiderstandswerte zu haben, die evtl. auch für andere Zwecke als die hier vorliegenden auswertbar

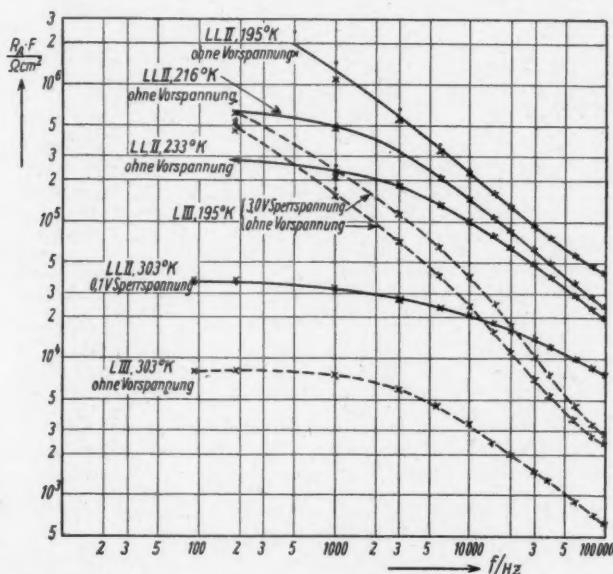


Abb. 2. Frequenzabhängigkeit der $R_A \cdot F$ -Werte eines Gleichrichters LL II (ausgezogene Kurven) und eines Gleichrichters L III (gestrichelte Kurven), beide poliert und mit Ag-Kontaktierung versehen, bei verschiedenen Temperaturen.

$$\left(\frac{1}{R_A F} = \text{Realkomponente des Scheinleitwertes bezogen auf } 1 \text{ cm}^2 \text{ des Stromquerschnittes} \right)$$

und andererseits noch nicht mit Ungenauigkeiten und Fehlern einer umständlichen Rechnung behaftet ist, wurden in Abb. 2 und Abb. 3 neben anderen Kurven (die gestrichelt sind) einfach direkt die an der Scheinwiderstandsmeßbrücke (Abb. 3 in Teil I) gemessenen $R_A F$ - und C_A/F -Werte bei einer polierten U-Zelle mit Ag-Kontaktierung in Abhängigkeit von der Frequenz und bei verschiedenen Tem-

⁵⁾ Es wurden von der ursprünglich geätzten und versilberten Scheibe 0,0904 g, also etwa 13 μ abpoliert.

peraturen^{*)} aufgetragen, ebenso wie in Teil I bei massiven Scheiben. Es bedeutet hierbei R_A den Widerstand, C_A die Kapazität einer Parallelschaltung von Widerstand und Kapazität, welche bei der betrachteten Frequenz denselben Scheinwiderstand besitzt wie das Meßobjekt. Es ist also $\frac{1}{R_A}$ gleich der Realkomponente und das mit der Kreisfrequenz $2\pi f$ multiplizierte C_A gleich der Imaginärkomponente des Leitwertes des Meßobjektes. F ist die Kontaktierungsfläche (etwa 8 cm^2 , von Exemplar zu Exemplar leicht streuend).

Mit steigender Temperatur nimmt R_A ab und C_A zu. Also nehmen sowohl die Realkomponente $\frac{1}{R_A}$ als auch die Imaginärkomponente $2\pi f \cdot C_A$ des Schein-

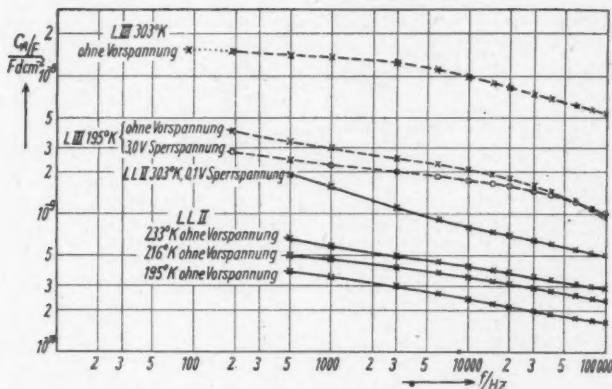


Abb. 3. Frequenzabhängigkeit der C_A/F -Werte eines Gleichrichters *LL II* (ausgezogene Kurven) und eines Gleichrichters *L III* (gestrichelte Kurven), beide poliert und mit Ag-Kontaktierung versehen, bei verschiedenen Temperaturen.
($2\pi f C_A/F$ = Imaginärkomponente des Scheinleitwertes bezogen auf 1 cm^2 Stromquerschnitt)

leitwertes mit wachsender Temperatur zu. Im allgemeinen scheint hierbei der Temperaturkoeffizient bei tiefen Frequenzen größer als bei hohen zu sein.

Nach dem Ersatzschema von Schottky und Deutschmann⁷⁾ müßten bei genügend tiefen Frequenzen f die Größen R_A und C_A frequenzunabhängig werden. Dies Gebiet ist, wie man sieht, bei der Zelle *LL II* nirgends völlig erreicht worden.

^{*)} Bei 303° K liegt gleichzeitig eine Sperrspannung von 0.1 V an der Zelle. Die ± 0.0 -Kurve ist durch etwas kleinere R_A und größere C_A gekennzeichnet, verläuft aber nach vielfachen Vergleichen an andern Zellen ähnlich.

⁷⁾ Für das Ersatzschaltbild von Schottky-Deutschmann [Physik. Z. 30, 889 (1929), auch Teil I § 1, Abb. 1] besteht für tiefe Frequenzen dann Frequenzunabhängigkeit von C_A , wenn $2\pi f C_p < \frac{1}{R_p} + \frac{1}{R_b} \approx \frac{1}{R_b}$ ist, und von R_A , wenn $2\pi f C_p < \sqrt{\frac{1}{R_p} \left(\frac{1}{R_p} + \frac{1}{R_b} \right)}$

$\approx \sqrt{\frac{1}{R_p R_b}}$ ist.

Die den soeben geschilderten Scheinleitwerten entsprechenden Leitfähigkeitsanalysen⁸⁾ für die Temperaturen 195° K, 216° K und 303° K sind in Abb. 4 gezeigt, wobei wiederum zu beachten ist, daß bei 303° K eine Sperrspannung von 0,1 V an der Zelle liegt.

In Abb. 4 ist hierbei versucht worden, den Einfluß der Ag-Kontaktierung zu berücksichtigen, indem die Kurven an Hand der Messungen an einer massiven ll -Scheibe, der Scheibe $LL 2$, korrigiert wurden. Die Korrektur erfolgte folgendermaßen:

Es wurde jeweils von dem zu einem bestimmten α -Wert des Gleichrichters $LL 2$ zugehörigen α -Wert die Hälfte des zu dem gleichen α -Wert gehörigen α -Wertes der massiven Scheibe $LL 2$ abgezogen⁹⁾.

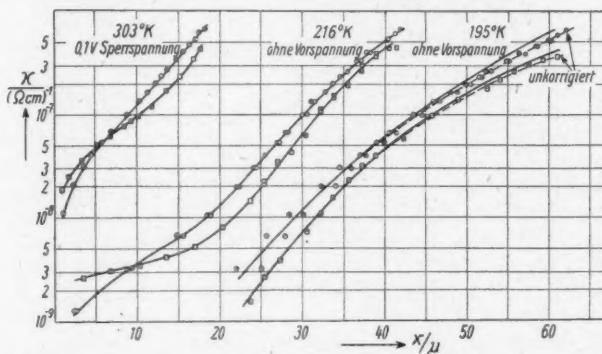


Abb. 4. Leitfähigkeitsanalysen eines polierten und mit Ag-Kontaktierung versehenen Gleichrichters $LL 2$ bei verschiedenen Temperaturen

Da die für die Korrektur verwendete Scheibe $LL 2$ eine massive ll -Scheibe mit sehr ausgesprochenem Kontaktierungseinfluß war, darf man annehmen, daß der Einfluß der Kontaktierung bei dem Gleichrichter $LL 2$ in Wirklichkeit höchstens ebenso groß war und damit nach Abb. 4 praktisch zu vernachlässigen ist. Bei höheren Temperaturen liegen die Korrekturen innerhalb der Meßgenauigkeit.

⁸⁾ Bei allen ll - und l -Zellen wurde für die Berechnung der α -Werte als Stromquerschnitt die Fläche der Silberkontakteierung benutzt. Es wurde nämlich festgestellt, daß sich auf diese Weise in den meisten Fällen einheitliche Ergebnisse einstellen, wenn der selbe Gleichrichter mehrmals hintereinander Ag-bedampft, gemessen, gesäubert und von neuem Ag-bedampft wurde. Die einzelnen Ag-Elektroden hatten dabei etwas verschiedene Flächeninhalte. Der Befund läßt sich im Sinne der Arbeit von W. Schottky, Physik. Z. 31, 913 (1930), dadurch deuten, daß hier auch bei Vorspannungen ≤ 0 die „Abklingstrecke“ der seitlichen Stromausbreitung von der Gegenelektrode aus nicht groß gegen die Schichtdicke ist.

⁹⁾ In Teil I wurde ja in § 3 auseinandergesetzt, daß der aus der Reihenkapazität C erschlossene α -Wert nicht unbedingt die Entfernung x der Schicht mit der Leitfähigkeit α von der Grenze Cu/Cu_2O zu sein braucht, sondern daß zunächst einmal der α -Wert die Summe aller Schichtdicken mit einer Leitfähigkeit $< \alpha$ angibt. Der halbe α -Wert der Scheibe $LL 2$ wurde deswegen verwendet, weil die massiven Scheiben beidseitig mit Ag kontaktiert sind.

Man ist also wohl berechtigt, die Kurven der Abb. 4, als nicht durch Kontaktierungseffekte verfälscht anzusehen.

Eine Betrachtung von Abb. 4 zeigt, daß bei 195°K von der Leitfähigkeitsanalyse der größte Teil der Cu_2O -Schicht, die ja nach dem Abpolieren eine Breite von höchstens $90\text{ }\mu$ besitzen dürfte, erfaßt wird. Die $\circ\circ\circ$ -Kurve und $\square\square\square$ -Kurve laufen bei dieser Temperatur über den ganzen Meßbereich noch annähernd konform. Jedoch schon bei 216°K tritt ein Überschneiden der beiden Kurven ein, das dadurch zustande kommt, daß die $\square\cdot\cdot\cdot$ -Kurve zwischen $2\text{ }\mu$ und $15\text{ }\mu$ bzw. zwischen $\kappa = 2,5 \cdot 10^{-9} (\Omega\text{ cm})^{-1}$ und $\kappa = 5 \cdot 10^{-9} (\Omega\text{ cm})^{-1}$ Tendenzen zu einem waagerechten Verlauf zeigt. Nach den Ausführungen in Teil I § 3 (siehe auch Teil I Abb. 5) kann dies durch eine örtliche konstante Leitfähigkeit oder durch eine Raumladungsschicht mit Störstellenerschöpfung bedingt sein.

Bei 303°K und $0,1\text{ V}$ Sperrspannung (Abb. 6) rutscht der Überschneidungspunkt weiter in die Höhe auf $6 \cdot 10^{-9} (\Omega\text{ cm})^{-1}$. Es macht sich ein nochmaliger Abfall der $\square\square\square$ -Kurve nach kleineren κ -Werten bemerkbar, der nach anderen Befunden eine nochmalige, nunmehr wohl der eigentlichen Erschöpfungsrandschicht zuzuordnende Überschneidung beider Kurven wahrscheinlich macht. Der Meßbereich umfaßt jetzt nur noch eine Breite von etwa $20\text{ }\mu$, weil der Hauptteil der Cu_2O -Schicht so gut leitend wird, daß er mit 100 KHz nicht mehr kapazitiv überbrückt wird. Messungen bei verschiedenen Vorspannungen liegen nur bei unpolierten Zellen vor, bei denen ein Teil der Spannungsabhängigkeit auf Einflüsse an der Silber- bzw. Graphitkontakteierung zurückgeführt werden könnte. Bei dem Gleichrichter $LL\text{ II}$ war bei 233°K über den größten Teil des Meßbereiches kein Einfluß einer Sperrspannung von 10 V auf die Kurvenform gegenüber einer Messung mit $0,1\text{ V}$ zu bemerken¹⁰⁾. Der Spannungseinfluß trat erst unterhalb $\kappa = 10^{-9} (\Omega\text{ cm})^{-1}$ und dort bis herab zu $\kappa = 2 \cdot 10^{-9} (\Omega\text{ cm})^{-1}$ nur schwach auf. Lediglich bei noch niedrigeren Leitfähigkeiten wichen die $\square\square\square$ -Kurven für die Vorspannungen $0,1\text{ V}$ und $10,0\text{ V}$ stärker voneinander ab.

§ 4. Untersuchungen an I -Gleichrichtern

Bei I -Gleichrichtern wurde im Anschluß an Durchmessungen von Scheiben mit Graphitkontakteierung und normaler fabrikationsmäßiger Ätzung ebenfalls eine Zelle $L\text{ III}$ abpoliert und mit Ag-Kontaktierung versehen. Die R_{AF} -Werte und C_{AF} -Werte sind für Messungen an diesem Gleichrichter in Abb. 2 und Abb. 3 (gestrichelte Kurven) wiedergegeben.

Es zeigt sich, wie sich aus den niedrigeren R_{AF} - und höheren C_{AF} -Werten ergibt, daß bei dem I -Gleichrichter die Realteile und Imaginärteile des Leitwertes für eine gegebene Frequenz um etwa $1/2$ bis $1 1/2$ Zehnerpotenzen höher liegen als bei dem im vorigen Paragraphen besprochenen ll -Gleichrichter. Die R_{AF} - und C_{AF} -Werte nehmen auch hier für tiefe Frequenzen nur bei 303°K einen einigermaßen frequenzunabhängigen Wert an. Der Einfluß einer anliegenden Sperrspannung äußert sich bei 195°K in einer Erniedrigung der Realkomponente des Leitwertes, d. h. Erhöhung von R_{AF} , und nimmt bei hohen Frequenzen ab. Der Imaginärteil des Leitwertes wird bei hohen Frequenzen praktisch spannungsunabhängig und nimmt bei tiefen Frequenzen ebenfalls mit zunehmender Sperrspannung ab.

¹⁰⁾ Die Zelle war bei dieser Messung noch nicht poliert, sondern geätzt und mit Ag kontaktiert.

In Abb. 5 sind die Leitfähigkeitsanalysen¹¹⁾ des Gleichrichters *L III* bei 195° K in poliertem Zustand mit Ag-Kontaktierung (gestrichelte Kurven) bei den Vorspannungen $\pm 0,0$ V und $-3,0$ V zwischen entsprechenden Analysen der Zelle in unpoliertem, geätztem mit Graphitkontakteierung versehenen Zustand (ausgezogene Kurven) bei den Vorspannungen $+2,0$ V; $+1,0$ V; $-20,0$ V aufgetragen. Wie die gute Einordnung der 1,0 V-Sperrspannungskurve zwischen die $\pm 0,0$ V- und $3,0$ V-Sperrspannungskurven zeigt, äußert sich der Einfluß der verschiedenen Kontaktierungen nur in verhältnismäßig geringem Maße.

Abb. 6 zeigt an dem polierten und mit Ag-Kontaktierung versehenen Gleichrichter *L III* die Leitfähigkeitsanalyse bei 303° K in stromlosem Zustand. Hier

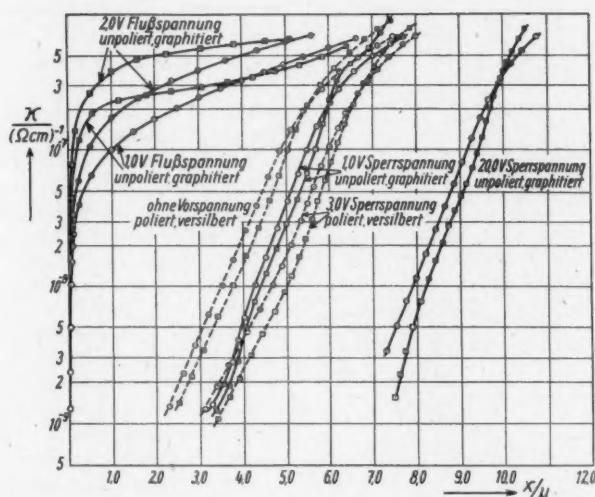


Abb. 5. Leitfähigkeitsanalyse eines Gleichrichters *L III*, unpoliert mit Graphitkontakteierung und poliert mit Ag-Kontaktierung bei 195° K unter verschiedener Vorspannungsbelastung

tritt eine Überschneidung der beiden Kurven und ein etwa $0,4 \mu$ breites annähernd waagerechtes Stück der $\square \square \square$ -Kurve bei einer Leitfähigkeit von $8-10 \cdot 10^{-9} (\Omega \text{ cm})^{-1}$ auf. (Man beachte den veränderten Abszissenmaßstab!)

Von Interesse dürfte auch noch der aus den Stromspannungs-Kennlinien im Flussgebiet bei 195° K und 303° K ermittelte differentielle Widerstand bei der polierten und mit Ag-Kontaktierung versehenen Zelle sein (Abb. 7). Bei 3 Volt Flusspannung wird hierbei noch immer ein Abfall des differentiellen Widerstandes verzeichnet. Der Widerstand des neutralen Cu_2O muß dementsprechend bei 195° K noch kleiner als 200Ω , bei 303° K kleiner als 2Ω sein; mit einer Kon-

¹¹⁾ Auch hier wurden versuchsweise Korrekturen bezüglich der Ag-Kontaktierungs-widerstände vorgenommen; sie änderten das Bild nicht wesentlich und sind deshalb nicht eingetragen worden.

taktierungsfläche¹²⁾ von $7,8 \text{ cm}^2$ und einer geschätzten Cu_2O -Dicke von 80μ ergäbe sich somit eine spezifische Leitfähigkeit von mehr als $5 \cdot 10^{-6} (\Omega \text{ cm})^{-1}$ bei 195° K und mehr als $5 \cdot 10^{-4} (\Omega \text{ cm})^{-1}$ bei 303° K . Diese Werte sind in Tabelle 1 des Teils I eingetragen. Der Vergleich mit den dort unmittelbar darüber stehenden Leitfähigkeiten der massiven *l*-Scheiben zeigt, daß die *l*-Gleichrichter rund eine Zehnerpotenz schlechter als die massiven *l*-Scheiben¹³⁾ leiten.

Für die geätzte, graphitierte Scheibe wurde außerdem noch aus den C_A -Werten von 90 Hz bei verschiedenen Vorspannungen und einer Temperatur von 303° K nach der von Schottky angegebenen Methode¹⁴⁾ der Störstellengehalt ermittelt.

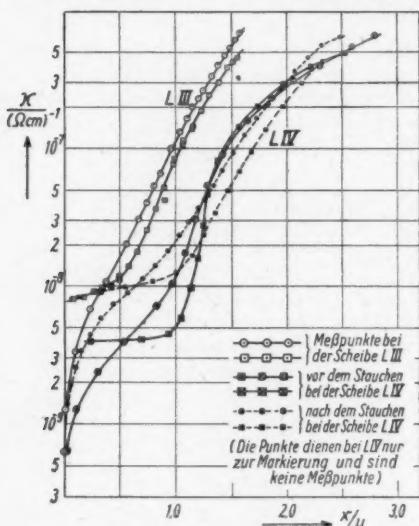


Abb. 6. Leitfähigkeitsanalyse des geätzten und mit Graphitkontakteierung versehenen Gleichrichters *L IV* vor und nach dem Stauchen und des polierten ungestauchten mit Ag-Kontaktierung versehenen Gleichrichters *L III* bei 303° K ohne Vorspannung

Während die Leitfähigkeitsanalyse der *ll*-Gleichrichter bei 195° K fast gar nicht geändert wurde, entstand bei einem geätzten, graphitierten *l*-Gleichrichter bei

¹²⁾ Betreffs des Stromquerschnitts, welcher bei Flußmesung anzusetzen ist, siehe F. Rose und E. Spenke, Z. Physik **126**, 632 (1949).

¹³⁾ In Abb. 7 sind die R_{eff} -Werte bei $3,0 \text{ V}$ noch nicht konstant geworden und man könnte daher annehmen, daß in Wirklichkeit die Gleichrichter-Leitfähigkeiten doch wesentlich größer als $5 \cdot 10^{-6}$ bzw. $5 \cdot 10^{-4} (\Omega \text{ cm})^{-1}$ wären. Es ist aber nicht anzunehmen, daß die R_{eff} -Werte noch um eine reichliche Zehnerpotenz bei 195 K , bzw. fast eine Zehnerpotenz bei 303° K abnehmen, so daß auf jeden Fall ein beträchtlicher Unterschied zwischen der Neutral-Leitfähigkeit der *l*-Gleichrichter und der der *l*-Massiv-Scheiben übrig bleiben dürfte.

¹⁴⁾ W. Schottky, Z. Physik **118**, 539 (1942), insbes. S. 553.

¹⁵⁾ Auch zeigt sich ein verstärktes „Kriechen“. Unter „Kriechen“ wird hierbei ein zeitliches Anwachsen des Sperrstromes bei anliegender Sperrspannung verstanden.

Diese Auswertung ist insofern ungenau, als die Methode streng genommen nur dann erlaubt ist, wenn bei den angewandten Frequenzen R_A und C_A praktisch frequenzunabhängig sind, was hier jedoch nicht völlig der Fall ist. Benutzt man diese Meßmethode trotzdem, so ergibt sich ein Störstellengehalt von rund $5 \cdot 10^{14} \text{ cm}^{-3}$, wie ebenfalls in Tabelle 1 des Teils I angegeben.

Eine weitere Erscheinung wurde noch bei *l*- und übrigens auch bei *ll*-Gleichrichtern untersucht: Setzt man Cu_2O -Gleichrichter mechanischen Beanspruchungen aus, drückt man z. B. die normalerweise etwas gekrümmten *n*-Gleichrichter flach, so steigt der Sperrstrom¹⁵⁾.

Untersuchungen des Einflusses einer derartigen, in diesem Fall durch seitliches Stauchen vorgenommenen mechanischen Beanspruchung auf die Leitfähigkeitsanalyse von *ll*- und *l*-Gleichrichtern (wobei die elektrische Messung nach der mechanischen Beanspruchung erfolgte) wurden ebenfalls gemacht.

303° K eine Veränderung wie in Abb. 6 gezeigt. Die Steilheit des stärker ansteigenden Teils insbesondere der $\square\Box\square$ -Kurve war hierbei außerdem noch von dem Druck abhängig, mit dem die Scheiben während der elektrischen Messung zwischen den Elektroden eingespannt waren. Bei der angegebenen Kurve wurde ein starker Druck angewendet. Die Höhe des waagerechten Teiles der $\square\Box\square$ -Kurve ist dagegen von dem während der Messung angewandten Druck nicht abhängig. Sie muß übrigens, wie sich nach Teil I, § 3, Gl. (3) ergibt, unabhängig davon sein, ob bei der Berechnung die Kontaktierungsfläche falsch angesetzt ist. Die durch das Stauchen hervorgerufene Änderung beruht vor allen Dingen darauf, daß dieses waagerechte Stück der Quadratkurve, welches höchst wahrscheinlich die mittlere Leitfähigkeit der Erschöpfungsrandsschicht bedeutet, höher gerückt ist und unter einer gewissen Neigung verläuft. Man hat den Eindruck, daß man es im wesentlichen mit, wahrscheinlich lokalen, Leitfähigkeits erhöhungen der Sperrschicht zu tun hat, die dem Parallelschalten Ohmscher Widerstände zur Erschöpfungsschicht entsprechen. Dies ist in Übereinstimmung mit der Erfahrung, daß bei mechanischer Beanspruchung der Sperrstrom steigt, was auch bei dem hier geschilderten Versuch festgestellt wurde. Die Abweichung der $\square\Box\square$ -Kurve von der Horizontalen ließe sich vielleicht hier, wie auch in andern Fällen, dadurch deuten, daß Teile der Erschöpfungsrandsschicht nicht nur eine erhöhte Leitfähigkeit, sondern auch eine erhöhte Kapazität erhalten haben.

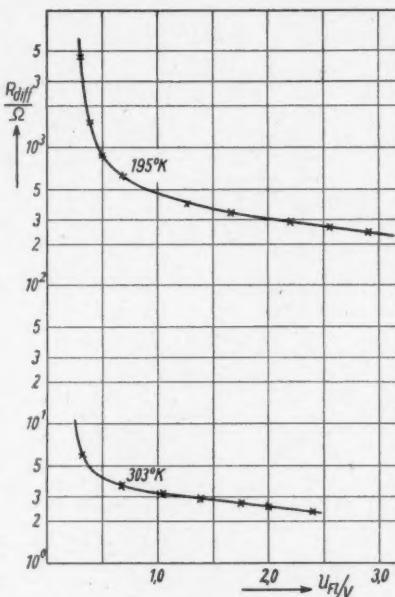


Abb. 7. Differentieller Widerstand des polierten und mit Ag-Kontaktierung versehenen Gleichrichters L III im Flußgebiet bei 195° K und 303° K. (Kontaktierungsfläche 7,8 cm²)

§ 5. Messungen an *n*-Zellen

Auch von *n*-Gleichrichtern wurden neben einer großen Zahl geätzter graphierter Exemplare einige polierte mit Ag-Kontaktierung versehene Scheiben untersucht. Es liegen Messungen an *n*-Zellen sowohl aus CCC-Kupfer als auch aus NA-Kupfer vor. Wir besprechen die letzteren an erster Stelle.

Die $R_A F$ - und $C_A F$ -Werte einer zuvor geätzten graphitierten *n-NA*-Scheibe nach einer anschließenden Polierung¹⁶⁾ und Ag-Kontaktierung zeigen die Abb. 8 und 9 (ausgezogene Kurven).

Die Kurven verlaufen für tiefe Frequenzen bei 303° K sowohl für $R_A F$ als auch $C_A F$ weitgehend parallel der Frequenzachse. Dies äußert sich ebenfalls im Schein-

¹⁶⁾ Es wurden 0,147 g abpoliert, was ungefähr 21 μ entspricht.

widerstandsdiagramm. Dort ergibt sich bis etwa 6000 Hz ein Halbkreis, was bis zu dieser Frequenz Gültigkeit des Ersatz-Schaltbildes von Schottky-Deutschmann¹⁷⁾ (Abb. 1, § 1, Teil I) bedeutet¹⁸⁾. Oberhalb 6000 Hz treten aber trotz des Abpolierens und der guten Ag-Kontaktierung noch Abweichungen auf, die entsprechend den Ausführungen von § 1, Teil I, nicht einfach auf kapazitive Überbrückung eines Neutralgebietes örtlich konstanter Leitfähigkeit zurückgeführt werden können¹⁹⁾.

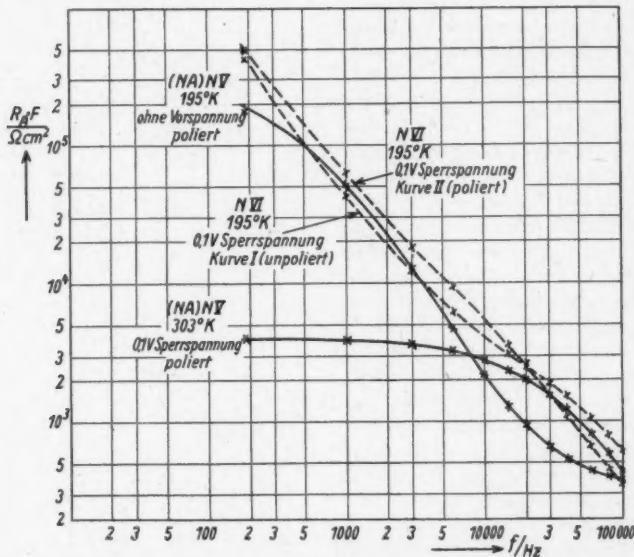


Abb. 8. Frequenzabhängigkeit der $R_A \cdot F$ -Werte eines polierten Gleichrichters (NA) N V mit Ag-Kontaktierung bei 195° K und 303° K und eines Gleichrichters N VI mit Ag-Kontaktierung bei 195° K, unpoliert und unter Graphitkontaktierung gealtert (Kurve I), desgleichen in poliertem Zustand (Kurve II).

$$\left(\frac{1}{R_A \cdot F} = \text{Realkomponente des Scheinleitwertes bezogen auf } 1 \text{ cm}^2 \text{ Stromquerschnitt} \right)$$

Bei 195° K sind nach Abb. 8 und 9 die $R_A F$ - und C_A/F -Werte in dem durchgemessenen Bereich überall frequenzabhängig, jedoch scheint $R_A F$ bei noch höheren Frequenzen einem konstanten Wert zuzustreben. Auf Grund von Überlegungen ähnlich wie bei massiven Scheiben in Teil I (siehe dort § 5) kann man vielleicht daraus folgern, daß sich im Cu_2O -Inneren ein Gebiet weitgehend örtlich konstanter Leitfähigkeit befindet, dessen Gesamtwiderstand durch den bei genügend hohen Frequenzen konstant gewordenen $R_A F$ -Wert gegeben ist. Setzt man an,

¹⁷⁾ W. Schottky u. W. Deutschmann, Physik. Z. 30, 839 (1929).

¹⁸⁾ Siehe Anmerk. 7.

¹⁹⁾ Für örtlich konstante Leitfähigkeit des Neutralgebietes wären entsprechend Teil I, § 1, so starke Abweichungen, wie sie bei (NA) N V für 100 KHz gefunden wurden, nur oberhalb 5 MHz zu erwarten.

daß bei ungefähr $3,6 \cdot 10^2 \Omega \text{ cm}^2$ die Größe $R_A F$ frequenzunabhängig würde und nimmt man für die Breite der Schicht gleich guter Leitfähigkeit etwa 80μ an, so ergäbe sich für die spezifische Leitfähigkeit des Cu_2O -Inneren bei 195°K ein Wert von $\kappa = 2 \cdot 10^{-6} (\Omega \text{ cm})^{-1}$ in Übereinstimmung mit Widerstandsbestimmungen bei hohen Flusspannungen. Die Leitfähigkeitsanalyse im stromlosen Zustand bei 195°K und bei 303°K und $0,1 \text{ V}$ Sperrspannung²⁰⁾ zeigt Abb. 10. Für 303°K tritt ein Kurvenverlauf von $\square \square \square$ -Kurve und $\circ \circ \circ$ -Kurve bei nicht zu hohen Frequenzen auf, der demjenigen von Abb. 5, Teil I, sehr weitgehend ähnlich ist und dementsprechend, wie in Teil I, § 3 geschildert, auf eine Schicht scheinbar örtlich konstanter Leitfähigkeit, wie sie auch bei einer Raumladungs-

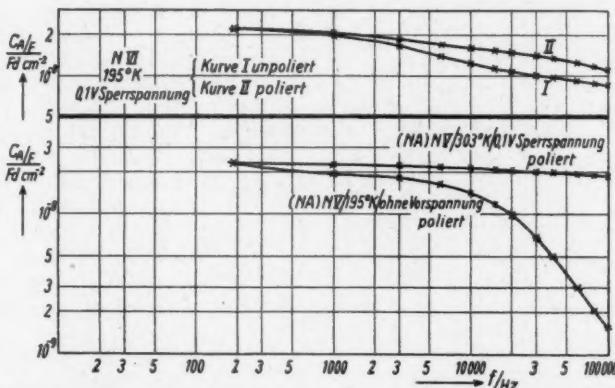


Abb. 9. Frequenzabhängigkeit der C_A/F -Werte eines polierten Gleichrichters (N A) N V mit Ag-Kontaktierung bei 195°K und 303°K und eines Gleichrichters N VII mit Ag-Kontaktierung bei 195°K , unpoliert und unter Graphitkontakteierung gealtert (Kurve I), desgleichen in poliertem Zustand (Kurve II).
 $(2\pi C_A/F = \text{Imaginärkomponente des Scheinleitwertes bezogen auf } 1 \text{ cm}^2 \text{ Stromquerschnitt})$

schicht mit Störstellenerschöpfung zu erwarten ist, zurückgeführt werden kann. Die letztere Deutung ist diejenige, die der Gesamtheit der Deutungen und Befunde an Cu_2O -Gleichrichtern bei Zimmertemperatur entspricht.

Ganz ähnliche Ergebnisse lieferten Messungen an anderen NA-Gleichrichtern. An solchen wurde auch eine Bestimmung des Störstellengehaltes aus der Spannungsabhängigkeit der Kapazität für Frequenzen von 1000 Hz bei 303°K vorgenommen. Es ergeben sich Werte von $3 \dots 5 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-2}$. Für einen CCC-Gleichrichter N VI zeigen die gestrichelten Kurven der Abb. 8 und der obere Teil der Abb. 9 zunächst die Frequenzabhängigkeit von $R_A F$ und C_A/F im Tieftemperaturgebiet bei 195°K ²¹⁾. Es handelt sich um eine Zelle, die mit Graphitkontakteierung stark gealtert war, deren Graphitkontakteierung durch bloßes

²⁰⁾ Es wurde bei 303°K für die Berechnung der κ -Werte als wirksame Kapazitätsfläche die Cu-Fläche eingesetzt. Bei Kontaktierung der Zelle mit verschiedener Fläche ergab sich nämlich dann völlige Übereinstimmung der Analysenkurven für beide Kontaktierungen. Bei 195°K lag dagegen der Fall der Anmerk. 8 vor.

²¹⁾ Man beachte den nicht durchlaufenden Ordinatenmaßstab in Abb. 9.

Abwaschen entfernt worden war und die dann mit Ag-Kontaktierung versehen wurde. Die Kurven I beziehen sich auf eine Messung in diesem Zustand. Anschließend wurde die Zelle schwach abpoliert und wieder mit Ag-Kontaktierung versehen. Eine Durchmessung ergab dann die Kurven II²²⁾. Die R_A/F -Werte sind größtenteils dieselben wie bei NA-Kupfer, jedoch ist hier bei hohen Frequenzen noch nicht die Andeutung eines Übergangs in einen konstanten Wert vorhanden. Die C_A/F -Werte sind bei tiefen Frequenzen annähernd dieselben wie bei dem NA-Gleichrichter; mit steigender Frequenz tritt jedoch bei dem CCC-Gleichrichter im Gegensatz zum NA-Gleichrichter nur ein schwacher Abfall auf²³⁾.

Aus den Leitfähigkeitsanalysen, die für diese Gleichrichter ja schon in Abb. 2 des Teils I gezeigt worden sind, erkennt man, daß bei der gealterten Zelle breite Schichten mit einer Leitfähigkeit zwischen 10^{-4} und $10^{-6} (\Omega \text{ cm})^{-1}$ auftreten, die durch das Polieren fast völlig entfernt werden²⁴⁾. Aus der Tatsache, daß die $\square \square \square$ -Kurve selbst bei $\chi = 10^{-6} \Omega \text{ cm}$ noch keine Andeutung einer Horizontalisierung zeigt, kann man folgern, daß hier die mittlere Leitfähigkeit χ_m (s. w. u.) einer vorhandenen Erschöpfungsrandsschicht weit unter $10^{-9} (\Omega \text{ cm})^{-1}$ liegen muß.

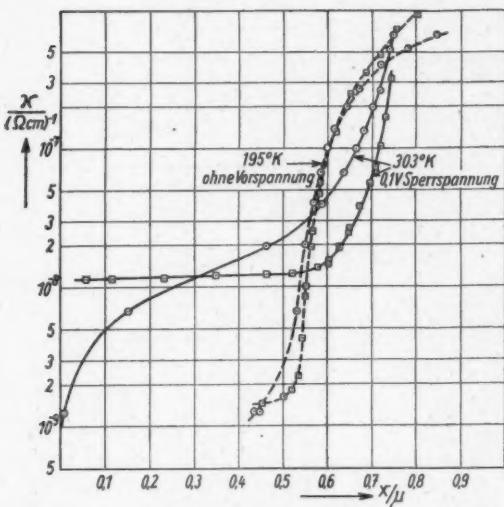


Abb. 10. Leitfähigkeitsanalyse eines polierten Gleichrichters (NA) N V mit Ag-Kontaktierung bei 195° K und 303° K

Der Befund, daß bei stärkerem Abpolieren (15μ) sich in einer (hier nicht gezeigten) Leitfähigkeitskurve eine Horizontalisierung der $\square \square \square$ -Kurve bei etwa $2 \cdot 10^{-10} (\Omega \text{ cm})^{-1}$ andeutet, könnte durch auftretende lokale Fehler im Sinne der obigen Diskussion der Stauchmessungen gedeutet werden. Für die fehlerfreie Schicht wäre dann χ_m noch kleiner als $2 \cdot 10^{-10}$ anzunehmen.

Messungen im normalen Temperaturgebiet liegen für diese Gleichrichterzelle leider nicht vor. Sie wurden für verschiedene Vorspannungen an einer anderen polierten und mit Ag-Kontaktierung versehenen CCC-Zelle bei 303° K vorgenommen (Gleichrichter N VII).

²²⁾ Die Fläche der Ag-Kontaktierung bei Zustand I betrug $8,1 \text{ cm}^2$, bei Zustand II war sie $8,2 \text{ cm}^2$ groß.

²³⁾ Die NA-Zelle wurde übrigens ohne Vorspannung, die CCC-Zelle mit 0,1 V Sperrspannung gemessen.

²⁴⁾ Siehe 1. Satz der Anm. 9.

Die $R_A F$ und $C_A F$ -Werte sind in Abb. 11 und 12 aufgetragen. Die Kurven laufen, abgesehen von der Messung bei $+0,05$ V, in einem weiten Bereich parallel der Frequenzachse. Dementsprechend²⁵⁾ durchläuft der Scheinwiderstand über

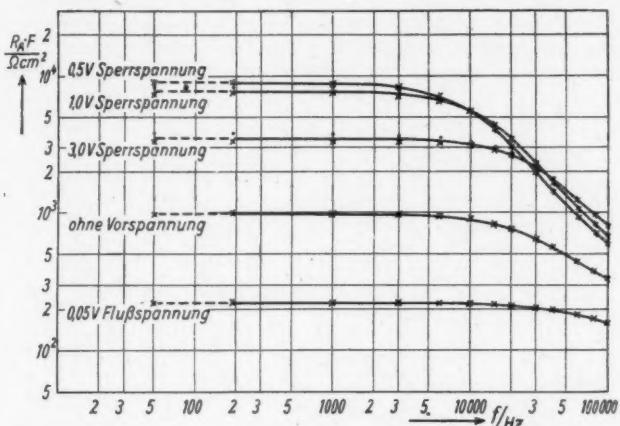


Abb. 11. Frequenzabhängigkeit der $R_A F$ -Werte eines polierten Gleichrichters N VII mit Ag-Kontaktierung bei $303^\circ K$ und bei verschiedenen Vorspannungen.

$(\frac{1}{R_A \cdot F} = \text{Realkomponente des Scheinleitwertes bezogen auf } 1 \text{ cm}^2 \text{ Stromquerschnitt})$

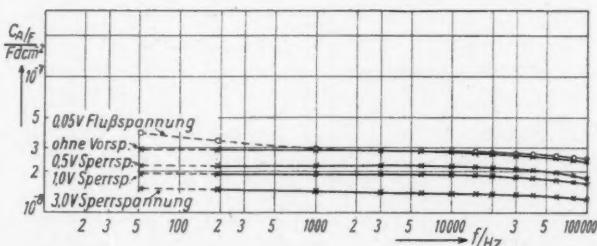


Abb. 12. Frequenzabhängigkeit der $C_A F$ -Werte eines polierten Gleichrichters N VII mit Ag-Kontaktierung bei $303^\circ K$ und bei verschiedenen Vorspannungen.

$(2\pi f C_A F = \text{Imaginärkomponente des Scheinleitwertes bezogen auf } 1 \text{ cm}^2 \text{ Stromquerschnitt})$

einen weiten Teil des Meßfrequenzbereiches einen Halbkreis; es treten aber auch hier bei hohen Frequenzen merkbare Abweichungen vom Halbkreisverlauf auf, die nicht einfach durch kapazitive Überbrückung eines Neutralgebietes örtlich konstanter Leitfähigkeit erklärt werden können²⁶⁾.

²⁵⁾ Siehe Anm. 7.

²⁶⁾ Siehe Hinweise in Anm. 19.

Die Leitfähigkeitsanalysen der in Abb. 11 und 12 angeführten Messungen sind in Abb. 13 aufgetragen²⁷⁾. Hier ist wie in Abb. 1 im Sperrgebiet wieder der „Verwehungseffekt“, d. h. die Verschiebung des Leitfähigkeitsanstieges zu höheren x -Werten (siehe § 1) zu erkennen. Es zeigt sich jedoch, wie übrigens auch in Abb. 1, daß die Widerstandsänderungen bei Anlegen verschiedener Vorspannungen nicht nur durch die unterschiedliche Breite der schlecht leitenden Schichten gegeben sind, sondern daß auch eine Veränderung der „mittleren“ spezifischen Leitfähigkeit κ_m auftritt, wenn man mit κ_m die Höhe der waagerechten Teile der κ - x -

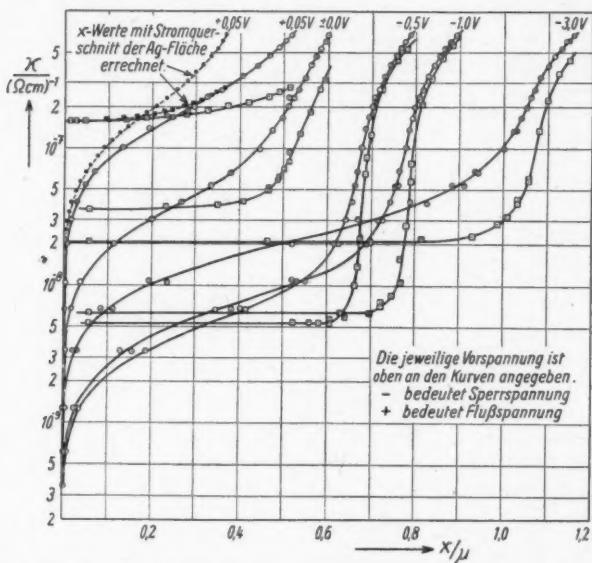


Abb. 13. Leitfähigkeitsanalyse eines polierten Gleichrichters N VII mit Ag-Kontaktierung bei 303° K und bei verschiedenen Vorspannungen

Kurven bezeichnet. Der Wert von κ_m sinkt anfänglich mit steigender Sperrspannung ab, nimmt bei noch weiterer Steigerung der Sperrspannung jedoch wieder zu²⁸⁾.

²⁷⁾ In Analogie zu der 303° K-Messung der vorher geschilderten NA-Zelle wurde x mit der Kupferfläche berechnet.

²⁸⁾ Da sich aus den Definitionsgleichungen der Leitfähigkeitsanalyse ergibt, daß für Erschöpfungsrandschichten, deren differentieller Widerstand groß gegen den Vorschaltwiderstand ist,

$$\kappa_m = \frac{\epsilon}{4\pi R_p C_p}$$

ist, wobei C_p die Kapazität und R_p den Widerstand im Schottky-Deutschmannschen Ersatzschaltbild (Teil I, Abb. 1) bedeuten, besagt die Veränderung von κ_m mit steigender Sperrspannung nur dasselbe, was schon Spenke über das Produkt $R_p C_p$ gesagt hat [E. Spenke, Z. Naturforsch. 4a, 37 (1949), insbesondere S. 44]. Spenke

Bei Anlegen von Flusspannungen sollte eigentlich eine „Zuwehung“, d. h. eine Verschmälerung der Randschicht auftreten. Dies tritt hier wegen der gleichzeitigen Verwischung des Überganges vom horizontalen in den ansteigenden Teil der $\square \square \square$ -Kurve nicht so deutlich in Erscheinung, wie man erwartet. Berechnet man im Flussgebiet die χ -Werte mit der Fläche der Silberkontakte (gestrichelte Kurven), im Sperrgebiet weiterhin mit der Cu-Fläche, so ist allerdings der Effekt schon ausgesprochener³⁰⁾. Bei 195° K wird dagegen, zumindest bei graphitierten Gleichrichter-Zellen, im niederen Flussgebiet die Zuwehung von den Analysenkurven noch deutlich dargestellt (Abb. 14)³⁰⁾³¹⁾.

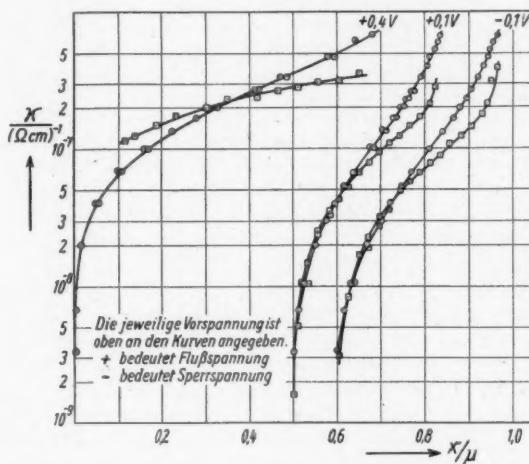


Abb. 14. Auftreten der „Zuwehung“ auch im Flussgebiet bei Leitfähigkeitsanalysen bei tiefen Temperaturen (195° K) an einem geätzten Gleichrichter N I mit Graphitkontakte

Bei der Gleichrichter N VII ergibt eine Messung der Stromspannungskennlinie im hohen Flussgebiet einen differentiellen Widerstand, der bis auf etwa

weist darauf hin, daß nach den Ansätzen der „Vereinfachten Theorie“ von W. Schottky ohne Berücksichtigung von Paßleit- und Tunneleffekten $R_p C_p$ mit steigender Sperrspannung anfänglich wachsen und dann konstant bleiben müßte, während es in Wirklichkeit bei hohen Sperrspannungen wieder absinkt.

³⁰⁾ Messungen im Flussgebiet mit verschiedener Kontaktierungsfläche zur Prüfung, ob es berechtigt ist, bei Anlegen von Flusspannungen die Ag-Fläche als Strom-Querschnitt einzusetzen, wurden nicht angestellt. Es sei aber hier auf die Überlegungen von F. Rose und E. Spenke, Z. Physik 126, 632–641 (1949) hingewiesen, nach denen der Übergang von Cu- auf Ag-Fläche beim Wechsel von Sperr- zu Flussspannung richtig sein dürfte.

³¹⁾ Die in Abb. 14 gezeigten Analysen wurden an derselben Zelle wie die in Abb. 1 vorgenommen, nur bei 195° K statt bei 303° K.

³²⁾ Auch bei Selenzellen liefern Leitfähigkeitsanalysen selbst bei 303° K eine auch noch im Flussgebiet spannungsabhängige Breite der Schichten niedriger Leitfähigkeit. Hier ist also der äußere Verwehungseffekt auch im Flussgebiet noch gut zu erkennen.

0,17 Ω abfällt³²⁾. Setzt man auch hier wieder für die Cu_2O -Dicke $80\ \mu$ an, so folgt daraus, bei einem wirksamen Stromquerschnitt von der Fläche der Silberkontakteierung, für die mittlere Leitfähigkeit des neutralen Cu_2O bei 303°K in diesem Gleichrichter $\kappa = 6 \cdot 10^{-3} (\Omega\text{ cm})^{-1}$. Der Unterschied zu der massiven Scheibe N8, bei der nach den Messungen eine nicht sehr viel höhere Leitfähigkeit als $8 \cdot 10^{-3} (\Omega\text{ cm})^{-1}$ anzunehmen ist, ist damit bei dieser Art von Zellen nicht mehr sehr groß (Tabelle 1, Teil I).

Für den Störstellengehalt ergibt sich aus der Spannungsabhängigkeit der Kapazität bei 1000 Hz und 303°K , also noch im Gebiet der frequenzunabhängigen C_A - und R_A -Werte, eine örtliche Verteilung, die im Meßbereich, d. h. zwischen $0,6\ \mu$ und $1,0\ \mu$ Entfernung von der Deckelektrode, von $3 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3}$ auf $9 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3}$ ansteigt, wie bei den meisten anderen n -Zellen (siehe z. B. Tabelle 1, Teil I), bei denen ebenfalls fast immer, im Sinne der Mitwirkung einer „chemischen Sperrschicht“ (vgl. z. B. F. Waibel³³⁾), ein Anstieg der Störstellenkonzentration nach dem Halbleiterinnern zu gemessen wird.

Zusammenfassung

Nachdem in Teil I Messungen des Scheinwiderstandes von massiven Scheiben geschildert und der Einfluß der Kontaktierung diskutiert worden waren, wurde in Teil II über Scheinwiderstands-Messungen an Gleichrichterscheiben berichtet. Untersucht wurden Scheiben aus zwei verschiedenen Cu-Sorten und verschiedener Abkühlungsbedingungen bei der Herstellung. Berichtet wurde über Messungen bei etwa 195°K und 303°K und z. T. bei dazwischenliegenden Temperaturen.

Neben den Scheinleitwerten, die in einer speziellen, sich aus der Meßmethode ergebenden Form graphisch dargestellt wurden, wurden auch Leitfähigkeitsanalysen gezeigt, wobei versucht wurde, den Einfluß der Kontaktierung mittels der in Teil I geschilderten Untersuchungsergebnisse abzuschätzen.

Unter anderem zeigte sich auch, daß die Abweichungen von der Halbkreisform des Frequenzganges des Scheinwiderstandes, welche bei anfänglich untersuchten, unzweckmäßig vorbehandelten und kontaktierten Gleichrichtern, ebenso wie bei Pfotzer, schon von 10 KHz an auftraten, auch bei Anwendung einer (nach den Untersuchungen des Teils I) besseren Methode der Entfernung des CuO und der Kontaktierung noch vorhanden waren.

Die Anwendung der Leitfähigkeitsanalyse von Lehovec ergab z. T. einigermaßen übereinstimmende Kurvenformen der zwei verschiedenen in Frage kommenden Auswertungsmethoden, was auf eine gewisse Realität der Analysergebnisse hindeuteten schien und im Sperrgebiet den Schottkyschen „Verwehungs-Effekt“ anschaulich darstellte.

Da sich bei der physikalischen Diskussion dieser Ergebnisse aber doch beachtliche Schwierigkeiten ergeben, soll sie in einem Teil III gesondert vorgenommen werden.

Auch an dieser Stelle möchte ich, wie in Teil I, Herrn Professor W. Schottky, Herrn Dr. E. Spenke und Herrn Dr. R. Reinbach für ihre Hilfe danken.

³²⁾ Messungen des Scheinwiderstandes bei einer Wechselspannung von 5 mV_{eff} und 50 Hz liefern bei kurzeitigen Flußstrombelastungen zwischen 5 Amp. und 10 Amp. ebenfalls unabhängig von der Belastung etwa diesen Widerstandswert. Bei höheren Belastungen traten, offenbar als Folge der Überlastung, sprunghafte Schwankungen des Widerstandes auf.

³³⁾ F. Waibel, Physik. Z. 36, 760 (1935).

Pretzfeld (Oberfranken), Siemens-Schuckertwerke.

(Bei der Redaktion eingegangen am 9. März 1951.)

olgt
on-
em
N8,
als
ehr
der
gen
hen
m⁻²
1 I),
err-
ach
ben
e in-
stet.
ener
agen
ren.
mode
eits-
tells
orm
ten,
bei
den
der
iger-
com-
ener-
ngag-
schaft-
men
cky,
n Vett
Amp.
a Be-
a des

Ein Verfahren zur genäherten Bestimmung der Lage von Energiebändern in Kristallen*)

Von H. Müller

(Mit 13 Abbildungen)

Inhaltsübersicht

Um einen Überblick über die Lage von Energiebändern in Kristallen zu erhalten, kommt man bei Benutzung des Verfahrens von Wigner-Seitz und Slater mit Wasserstoff-Funktionen aus. Diese Funktionen hängen von einem empirisch bekannten Parameter ab. Der Einfluß der Gitterstruktur auf die Energiebänder läßt sich dann von dem des Atoms trennen.

Bei der Berechnung der Lage von Energiebändern in Kristallen kommt man in vielen Fällen damit aus, die Nullstellen der $s-p-d$ Wellenfunktionen im kugelsymmetrischen Kraftfeld des Atomrumpfes und die Nullstellen ihrer Ableitungen $s'-p'-d'$ zu bestimmen. Die Funktionen müssen bei $r = 0$ die übliche Randbedingung erfüllen, bei $r = \infty$ nicht. Man muß sie für alle Werte E des in Betracht kommenden Energiegebietes kennen. Wigner-Seitz¹⁾ und Slater²⁾ fanden die Nullstellen mit Hilfe der numerischen Lösungen der Wellengleichung. Im Folgenden wird berücksichtigt, daß es im wesentlichen auf das Verhalten des Kraftfeldes, und damit der Wellenfunktion, für große r ankommt, wo die Abweichung der Funktionen von denen des Wasserstoffatoms durch einen empirisch bekannten Parameter beschrieben werden kann. Damit läßt sich der Einfluß der Gitterstruktur auf die Bänder von dem des Atoms trennen. Letzterer wird dann durch schon bekannte Parameter gegeben.

Das Kraftfeld des Rumpfes eines beliebigen einfach ionisierten Atoms geht für große r in das des Wasserstoffes über. In diesem Gebiete können die Wellenfunktionen durch die Lösungen der Wasserstoffdifferentialgleichung angenähert werden. Im allgemeinen durch solche, die bei $r = 0$ nicht die Randbedingung erfüllen. Bei vorgegebenem

$$E = -\frac{1}{2} \frac{1}{n^2}$$

(E in atomaren Einheiten, \hbar , e , m) (n kann beliebige, nicht notwendig ganzzählige Werte annehmen) lauten sie

$$R = A \cdot f_1(n, l, r) + B \cdot f_2(n, l, r),$$

*) Dissertation Jena.

¹⁾ E. Wigner u. F. Seitz, Physic. Rev. **43**, 804 (1933).

²⁾ J. C. Slater, Physic. Rev. **45**, 794 (1934).

wo f_1 und f_2 zwei unabhängige Lösungen der Wellengleichung des Wasserstoffes sind.

Für das Folgende ist es zweckmäßig, die Schar der Funktionen R bei gegebenem l und E (bzw. n) durch einen einzigen Parameter δ in der Form

$$R \sim \cos \pi \delta \cdot f_1 - \sin \pi \delta \cdot f_2 \quad (1)$$

darzustellen. Wären f_1 und f_2 genau die Funktionen

$$f_1 = \frac{1}{r^{\frac{1}{2}l}} \cdot \cos (\sqrt{8r} - \alpha); \quad f_2 = \frac{1}{r^{\frac{1}{2}l}} \sin (\sqrt{8r} - \alpha), \quad (2)$$

welche die Wellengleichung des Wasserstoffes für große r und $E = 0$ lösen, so würden die Nullstellen von R in der Form

$$-\delta = \frac{1}{\pi} (\sqrt{8r} - \alpha) + m + \frac{1}{2}$$

mit δ zusammenhängen (m ist eine ganze Zahl), und bei Erhöhung von δ um 1 trüte die folgende Nullstelle an die Stelle der vorangehenden. Ein ähnlich einfacher Zusammenhang bestünde für die Nullstellen der Ableitung bei Vernachlässigung von Gliedern in R' , die wie $r^{-\frac{1}{2}}$ abnehmen. δ ist nur bis auf eine ganze Zahl bestimmt.

Das besondere Fundamentalsystem ${}_1R(n, l, r)$ und ${}_2R(n, l, r)$, welches Krupp³⁾ benutzt, steht für $n = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots$ in einem Verhältnis, das dem der obigen Annahme (2) für f_1 und f_2 entspricht. ${}_1R$ und ${}_2R$ gehen nämlich für $n \rightarrow \infty$ (n ganz- oder halbzahlig) in die Funktionen

$$\frac{1}{\sqrt{2r}} J_{2l+1}(\sqrt{8r}) \quad \text{und} \quad \frac{1}{\sqrt{2r}} N_{2l+1}(\sqrt{8r})$$

über (wo J_{2l+1} und N_{2l+1} die Bessel- bzw. die Neumann-Funktion der Ordnung $2l+1$ ist), von denen bekannt ist, daß sie sich für $r \rightarrow \infty$ asymptotisch den Funktionen

$$\pi^{-\frac{1}{2}} (2r)^{-\frac{3}{4}} \cdot \cos (\sqrt{8r} - [l + \frac{3}{4}]\pi)$$

bzw.

$$\pi^{-\frac{1}{2}} (2r)^{-\frac{3}{4}} \sin (\sqrt{8r} - [l + \frac{3}{4}]\pi)$$

nähern. Diese asymptotischen Ausdrücke stimmen aber bis auf einen Faktor mit (2) überein, wenn $\alpha = (l + \frac{3}{4})\pi$ ist. ${}_1R$ erfüllt außerdem bei $r = 0$ die Randbedingung.

Die Nullstellen der Lösungen der Wasserstoffgleichung und deren Ableitungen können jetzt als Funktionen von n, l, δ betrachtet werden. Als Beispiel sind in Abb. 1 die Nullstellen der s -Funktionen ($l = 0$) in Abhängigkeit von δ für einige ganz- und halbzahlige n dargestellt. (r gibt die Nullstellen in atomaren Einheiten.) Die Darstellung wurde mittels der bei Krupp tabulierten Funktionen ${}_1R$ und ${}_2R$

³⁾ H. Krupp, Ber. d. Sächs. Akad. d. Wiss. math.-naturw. Kl. 97 (1950).

gewonnen. Der Zusammenhang zwischen den Nullstellen und δ zeigt den durch die besondere Auswahl des Fundamentalsystems bedingten glatten Verlauf. Für die Zwischenwerte von n hätte man in (1) $f_1 = {}_1R(n, l, r)$ und $f_2 = {}_2R(n, l, r) + \cotg \pi(m - n) \cdot {}_1R(n, l, r)$ zu setzen, wo m eine ganze Zahl und n nicht ganzzahlig ist. Auch in diesem Fundamentalsystem entspricht das Verhältnis von f_1 zu f_2 demjenigen der Ausdrücke (2) zueinander. Der Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ zum Nachweis dieser Beziehung ist so zu führen, daß $\cotg \pi(m - n)$ konstant bleibt.

Da die Funktionen ${}_1R$ und ${}_2R$ für diese n nicht tabuliert sind, wurden die entsprechenden Nullstellen mittels eines Interpolationsverfahrens gewonnen. Denkt man sich in Abb. 1 Geraden durch die Kurvenschar gelegt, deren Richtung so gewählt wird, daß die Abschnitte zwischen drei aufeinanderfolgenden Kurven gleich- oder nahezu gleichlang sind, so kann man den auf diesen Geraden liegenden Punkten durch lineare Interpolation n -Werte zuordnen. Die Abb. 1 zeigt, daß es auch Sinn haben wird, ein Stück weit in das Gebiet $n < \frac{1}{2}$ zu extrapoliieren. Der auf diese Weise für mehrere Werte von n ergänzten Kurvenschar kann man den Verlauf der Nullstellen in Abhängigkeit von n bei konstantem δ entnehmen. Dieser Zusammenhang ist in Abb. 2 dargestellt. Es ist zweckmäßig, die δ , die ja nur bis auf eine ganze Zahl festgelegt sind, auf den Bereich $0 \leq \delta < 1$ zu beschränken, wie dies in Abb. 2 geschehen ist. Alle zusammengehörigen Nullstellen bei gegebenem n sind dann durch denselben Parameterwert bezeichnet. Auf demselben Wege wurden die Nullstellen der Funktionen s , p , p' , d und d' ermittelt, die in den Abb. 3-7 dargestellt sind. Das Verfahren verliert in der Umgebung von $n = l$ seinen Sinn.

Für einige einfache Gitter kann man jetzt die Bandränder angeben, wenn man sich die Gitter aus Wasserstoffatomen aufgebaut denkt, z. B. für ein einfaches kubisches Gitter, dessen Bandränder nach F. Hund und B. Mrowka⁴⁾ durch die Nullstellen von s -, s' -, p -, p' -, d - und d' -Funktionen gegeben sind. Die Wasserstoff-Funktionen f_1 erfüllen die Randbedingung bei $r = 0$. Ihre Nullstellen, die in Abb. 2 bis 7 durch den Parameter $\delta = 0$ gekennzeichnet sind, liefern die gesuchten Bandränder. In der Abb. 8 sind die Energiebänder wiedergegeben. Die schraffierte Gebiete stellen mögliche Energiewerte dar.

Bei anderen Atomen ist die Funktion R nur für solche r brauchbar, die größer oder ungefähr gleich dem Radius des Atomrumpfes sind. Der Parameter δ kann errechnet werden, indem man R stetig und mit stetiger Ableitung an die Lösung anschließt, die mit der richtigen Randbedingung bei $r = 0$ und etwa mit einem Fermi-Ionenpotential gewonnen wurde. δ kann aber auch aus den Eigenwerten

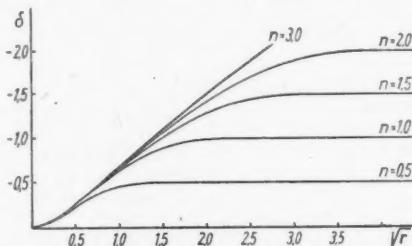


Abb. 1. Nullstellen von Wasserstoff- s -Funktionen.
 n als Parameter

⁴⁾ F. Hund u. B. Mrowka, Ber. d. Sächs. Akad. d. Wiss. math.-phys. Kl. 87, 325 (1935).

des freien Atoms entnommen werden. Schreibt man diese in der Form

$$E = -\frac{1}{2(g-\delta)^2},$$

wo g eine ganze Zahl ist, so ist δ der gesuchte Parameter. Erhöht man nämlich bei festem E und Beibehaltung der Randbedingung bei $r = 0$ δ um eine ganze Zahl,

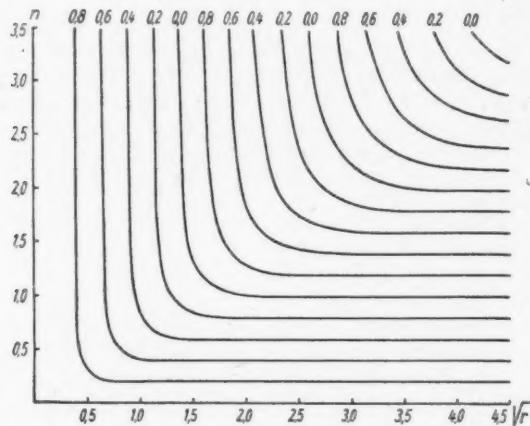


Abb. 2. Nullstellen von Wasserstoff- s -Funktionen.
 δ als Parameter

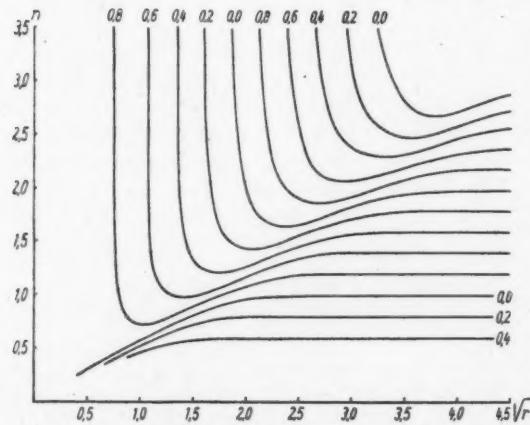


Abb. 3. Nullstellen von Wasserstoff- s' -Funktionen.
 δ als Parameter

so erhöhen sich die Nummern der äußeren Nullstellen um diesen Betrag. Da für große n die Lage der Nullstellen in glatter Weise von E und δ abhängen muß, folgt,

daß δ die oben eingeführte Bedeutung hat. Dieser Gedanke findet sich erstmalig bei Fermi⁸⁾, von Hellmig⁹⁾ wurde er dann näher ausgeführt. Man vergleiche hierzu auch F. Hund⁷⁾. δ kann von E abhängen. Die Abhängigkeit kann aus den spektroskopischen Termen entnommen werden, indem man mit

$$\delta = \delta_0 + \frac{\delta_1}{n^2} \quad (3)$$

interpoliert. δ_0 und δ_1 sind dann Konstante. Den genäherten Verlauf von δ_0 für $n = \infty$ in Abhängigkeit von der Kernladung Z , für verschiedene l , findet man in einer Arbeit von Hellmig a. a. O. Die Abb. 2 bis 7 geben nun bei bekanntem $\delta(E, l)$ die gesuchten Ränder der Energiebänder wieder. Dabei steckt der Einfluß des Gitters in den Abb. 2 bis 7, während der der Atome durch die Atomeigenschaft δ gegeben ist.

Denkt man sich in dem einfach-kubischen Gitter die Wasserstoffatome durch andere Atome ersetzt, deren Terme aber durch ganzzählige δ beschrieben werden, so würde das Aussehen der Bänder für große r mit dem der Abb. 8 übereinstimmen. In Wirklichkeit kommt dieser Fall wegen der aufgehobenen l -Entartung nicht vor. Die Bänder sehen vielmehr so aus, wie es in Abb. 9 dargestellt ist. Dabei wurden die Werte $\delta_0(s) = 1,6$; $\delta_0(p) = 1,2$; $\delta_0(d) = 0,0$ für die Atome des Gitters angenommen. δ_1 wurde vernachlässigt. Die durch s - und s' -Nullstellen gegebenen Bandränder sind die, welche in Abb. 2 und 3 durch den

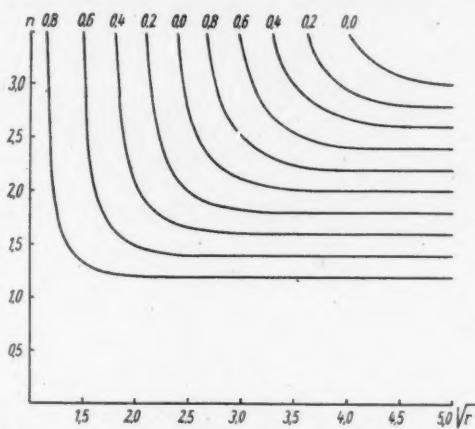


Abb. 4. Nullstellen von Wasserstoff- p -Funktionen. δ als Parameter

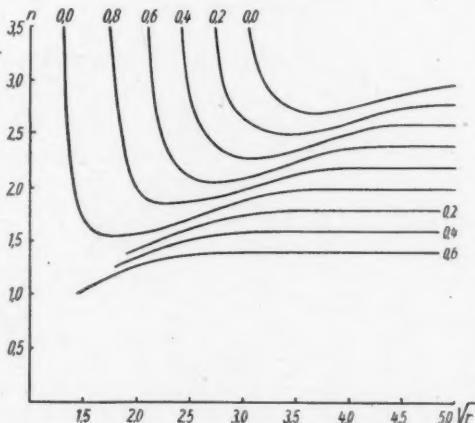


Abb. 5. Nullstellen von Wasserstoff- p' -Funktionen. δ als Parameter

⁸⁾ E. Fermi, Z. Physik 49, 550 (1928).

⁹⁾ E. Hellmig, Z. Physik 94, 361 (1935).

⁷⁾ F. Hund, Einführung in die theoretische Physik, Bd. V, S. 287 (1950).

Parameter 0,6 bezeichnet sind. Entsprechendes gilt für die p -, p' -, d - und d' -Nullstellen.

Die Differenzen der angenommenen δ -Werte stimmen mit den Mittelwerten der entsprechenden Differenzen bei Hellwig überein. Diese Differenzen sind

nur schwach von Z abhängig. Es bedeutet dies, daß die Bänder für irgend ein Z denen der Abb. 9 ähnlich sind. In einem Z -Bereiche, der nach unten etwa durch $Z = 20$ und nach oben durch den Einfluß von f -Terminen begrenzt wird, gehen sie annähernd durch eine Verschiebung aus Abb. 9 hervor.

Die Berücksichtigung von δ_1 in zweiter Näherung würde sich in einer Senkung oder Hebung der Atomniveaus und damit in einer stärkeren oder schwächeren Aufspaltung der Bänder äußern, je nachdem, ob δ_1 positiv oder negativ ist. In der Regel kann man bei s - und p -Terminen mit positivem δ_1 und bei d -Terminen mit negativem δ_1 rechnen.

Kohlenstoff, Silicium und Germanium kristallisieren im Diamantgitter. Die Bandränder dieses Gittertyps werden nach F. Hund und B. Mrowka⁸⁾ durch die Nullstellen von s -, s' -, p - und p' -Funktionen bestimmt. In den Abb. 10 bis 12 sind die Bänder dieser drei Stoffe dargestellt. Die δ sind den spektroskopischen Termen entnommen worden. Die zusammengehörigen Multiplett-Terme wurden mit

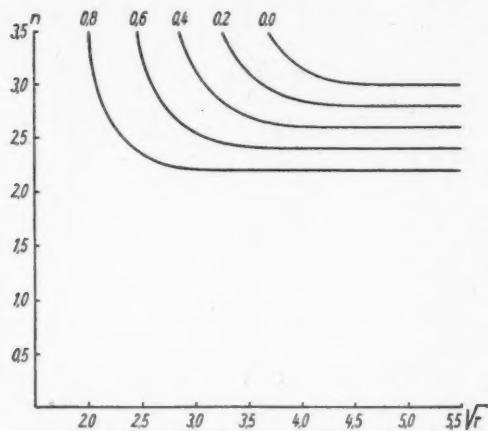


Abb. 6. Nullstellen von Wasserstoff- d -Funktionen.
 δ als Parameter

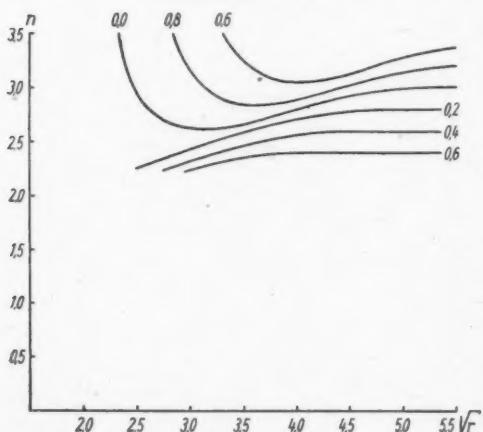


Abb. 7. Nullstellen von Wasserstoff- d' -Funktionen.
 δ als Parameter

Gewichten versehen gemittelt. Aus diesen Mittelwerten sind die in der folgenden Tabelle angegebenen n -Werte berechnet worden. Die eingeklammerten Werte,

⁸⁾ F. Hund u. B. Mrowka, Ber. d. Sächs. Akad. d. Wiss. math.-phys. Kl. 87, 185 (1935).

für die kein empirisches Material zur Verfügung steht, sind mit Hilfe der übrigen Werte extrapoliert worden. Zur Bestimmung von δ nach (3) wurden die fett gedruckten Werte benutzt.

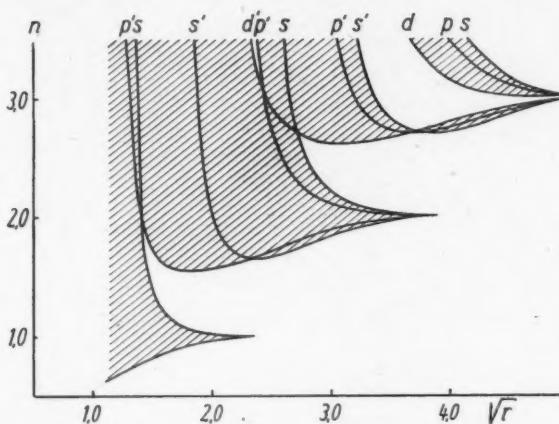


Abb. 8 Energiebänder von Wasserstoff im einfach-kubischen Gitter

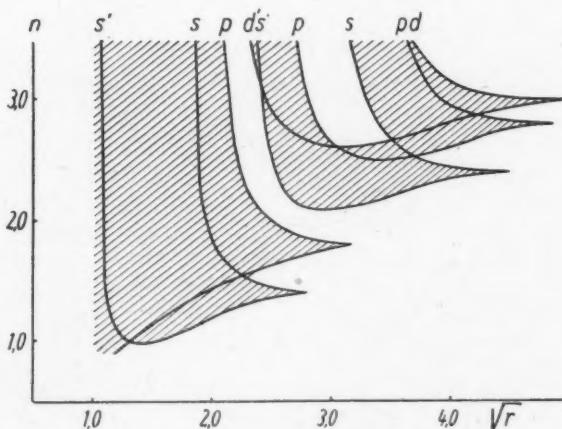


Abb. 9. Energiebänder im einfach-kubischen Gitter

In dieser Näherung spalten die d -Terme nicht auf. In den Abbildungen sind ihre empirischen Werte durch waagerechte Striche markiert. Die der Gitterkonstante entsprechende Stelle ist durch eine gestrichelte Linie bezeichnet. Der Übersicht halber wurden auch noch die nächsthöheren s - und p -Bänder eingezeichnet.

net, die aber wegen der engen Nachbarschaft mit den darüberliegenden d -Terme sicher keine gute Näherung darstellen. Man erkennt die große Isolatorlücke an der Stelle der Gitterkonstante beim Kohlenstoff. Beim Silicium ist diese Lücke kleiner geworden und beim Germanium noch kleiner. Bemerkenswert ist da

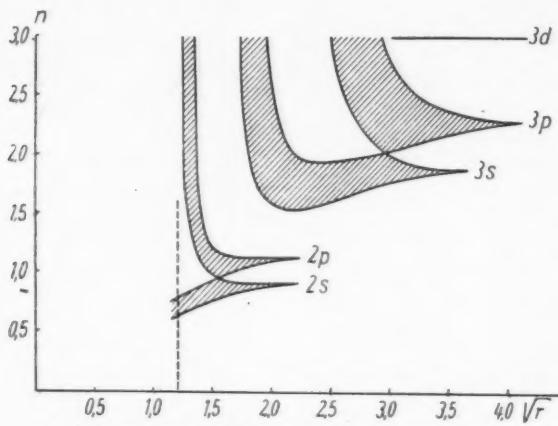


Abb. 10. Energiebänder von C im Diamantgitter

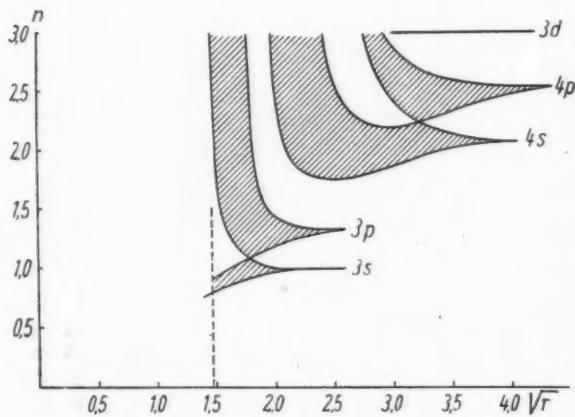


Abb. 11. Energiebänder von Si im Diamantgitter

kleinere Lücke des Germaniums gegenüber der des Siliciums, da die Gitterkonstanten und die Lage der entsprechenden s - und p -Terme beider Elemente nahe übereinstimmen. Bedingt ist dies durch das schwächere Aufspalten des $4s$ -Terms von Germanium gegenüber der Aufspaltung des $3s$ -Terms bei Silicium. Während die für die Stärke der Aufspaltung maßgebende Größe $\delta_1(s)$ beim Kohlenstoff

d -Bande
scheiden
Zum
n einer
gleich v

und Silicium der Regel entsprechend positiv ist, fällt sie beim Germanium negativ aus.

Vermutlich wird das 3d-Band des Germaniums in der Gegend der Gitterkonstante nur wenig aufgespalten sein, da $\delta_1(d)$ negativ ist. Ob zwischen dem

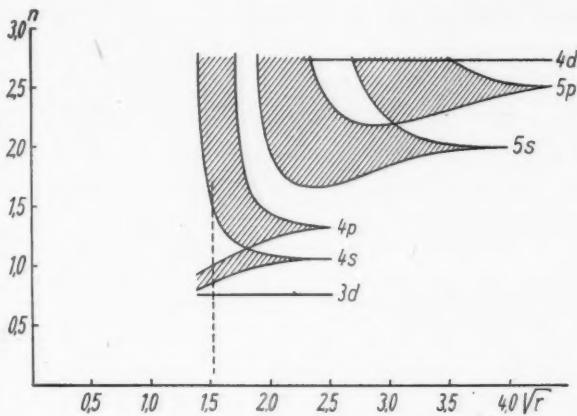


Abb. 12. Energiebänder von Ge im Diamantgitter

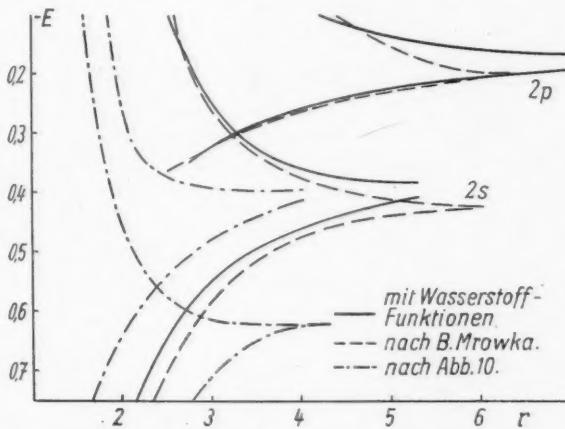


Abb. 13. Die Bandränder von C im Diamantgitter

3d-Band und dem 4s-Band eine Lücke vorhanden ist, läßt sich hier nicht entscheiden.

Zum Schluß sollen noch die nach diesem Verfahren bestimmten Bandränder in einem Beispiel mit den in „Strenge“ berechneten verglichen werden. Zum Vergleich wurde der Diamant gewählt, dessen Bänder in der Arbeit von F. Hund

und B. Mrowka⁸⁾ bestimmt wurden. Der Rechnung dieser Arbeit liegt ein Fermi-Ionenpotential zugrunde. Mittels dieses Potentials wurde δ_0 für $E = 0$ in der weiter oben besprochenen Weise berechnet. Es ergab sich

$$\delta_0(s) = 0,84 \text{ und } \delta_0(p) = 0,33.$$

Die Konstanten δ_1 sind — mit demselben Potential und mit Hilfe des $B-W-K$ -Verfahrens für $E = 0$ berechnet — nach einer Arbeit von G. Weber⁹⁾

$$\delta_1(s) = 0,05 \text{ und } \delta_1(p) = 0,00.$$

In der Abb. 13 sind die damit gefundenen Bandränder eingetragen. Daneben enthält

diese Abbildung den entsprechenden Teil des Ergebnisses von B. Mrowka. Der Vergleich zeigt befriedigende Übereinstimmung. Ferner sind in der Abb. 13 die entsprechenden Bandränder der Abb. 10 eingetragen, die den Unterschied der Ergebnisse hinsichtlich der Bestimmung von δ deutlich werden lassen.

Herrn Professor Dr. F. Hund bin ich für die Anregung zu dieser Arbeit und Beratungen bei deren Durchführung zu großem Dank verpflichtet.

⁸⁾ G. Weber, Diplomarbeit Jena 1950.

Jena, Theoretisch-Physikalisches Institut.

(Bei der Redaktion eingegangen am 5. April 1951.)

Term	C		Si		Ge	
	<i>n</i>	δ	<i>n</i>	δ	<i>n</i>	δ
2p	1,13	0,87				
3p	2,34	0,66	1,32	1,67		
4p	3,31	0,69	2,54	1,46	1,34	2,66
5p			3,59	1,41	2,50	2,50
2s	(0,9)	1,1				
3s	1,91	1,09	(1,0)	2,0		
4s	2,94	1,06	2,07	1,93	(1,05)	2,95
5s	3,94	1,06	3,12	1,88	2,02	2,98
6s	4,93	1,07	4,17	1,83	2,97	3,03
7s	5,93	1,07	5,23	1,77	3,83	3,17
8s			6,24	1,76		

Zu

Zu werden
skalare
dem Va
integri
tore bi
ihnen
Koppl
ladung
schlage
mit de

Wi
Spin-M
„mesic
die Ko
bestim
von e
nur ei
Die vo
tische
mente
bei w

Diese
treter
erst a

Er
der a
tische
erhie

¹⁾

²⁾

³⁾

⁴⁾

Zur Frage der magnetischen Momente der Nukleonen. I¹⁾

Von G. Heber

Inhaltsübersicht

Zum Zwecke der Berechnung der magnetischen Momente der Nukleonen werden die Gleichungen des Nukleonenfeldes mit skalarer Kopplung an ein reelles, skalares Mesonfeld mit Feldquantelung in der Heisenberg-Darstellung nach dem Vorgange von Källén bis zur zweiten Ordnung in der Kopplungskonstanten integriert. Es werden die Erwartungswerte des elektrischen Stromdichte-Operators bis zur zweiten Ordnung für ein Nukleon, null Mesonen berechnet und aus ihnen die Größen der magnetischen Zusatzmomente der Nukleonen infolge ihrer Kopplung an die Mesonen entnommen. Die Rechnung ist lorentz-invariant und ladungssymmetrisch, die Ergebnisse gegenüber der von Pauli-Villars vorgeschlagenen „formalen Regularisierung“ invariant. Das Resultat stimmt völlig mit dem Caseschen überein.

1. Einführung

Wir beschäftigen uns hier mit Versuchen, die Anomalien der magnetischen Spin-Momente von Proton und Neutron quantitativ zu erklären als Folgen der „mesischen Ladung“ der Nukleonen (als „mesische Ladung“ g bezeichnet man die Konstante, welche die Stärke der Kopplung zwischen Mesonen und Nukleonen bestimmt). Bekanntlich müßten Proton bzw. Neutron magnetische Momente von einem Kernmagneton ($= 1 \mu_0$) bzw. null Kernmagnetonen haben, wenn sie nur eine elektrische Ladung trügen und der üblichen Dirac-Gleichung genügten. Die von Schwinger²⁾ u. a. berechneten „Strahlungs-Korrekturen“ für das magnetische Moment elektrisch geladener Dirac-Teilchen, welche beim Elektron experimentell bestätigt sind, können die bei Proton und Neutron auftretenden Anomalien bei weitem nicht erklären; es ist ja gemessen;

$$\mu_P = (1 + 1,7896) \mu_0; \mu_N = -1,9103 \mu_0.$$

Diese Anomalien sind um einige Größenordnungen größer als die am Elektron auftretenden. Von den „elektromagnetischen Korrekturen“ sieht man deshalb vorerst ab, wenn man die Größe der „mesischen Korrekturen“ berechnen will.

Ein Vorläufer der in Rede stehenden Versuche stammt von Wick (1935)³⁾, der auf dem Boden der ursprünglichen Fermischen Theorie des β -Zerfalls ein magnetisches Zusatzmoment ganz grob abschätzte und etwa die richtige Größenordnung erhielt. — Yukawa (1938)⁴⁾ schätzte in seiner Meson-Theorie der Kernkräfte

¹⁾ Dissertation Jena, Teil I.

²⁾ J. Schwinger, Physic. Rev. **75**, 1912 (1949).

³⁾ G. C. Wick, Rend. Accad. Lincei **21**, 170 (1935).

⁴⁾ H. Yukawa, Proc. Phys.-Math. Soc. Japan **20**, 1 (1938).

auf ähnliche Weise wie Wick das auftretende Zusatzmoment ab und erhielt ebenfalls die richtige Größenordnung. — Heitler, Fröhlich, Kemmer (1938)⁵⁾ rechneten etwas genauer mit einem Modell, in welchem die Nukleonen tensoriell an ein vektorielles Mesonfeld gekoppelt waren. Sie machten jedoch die folgenschwere Idealisierung, mit klassisch-punktförmigen, an genau definiertem Ort ruhenden Nukleonen zu rechnen; die Nukleonen hatten nur Ladungs- und Spin-Freiheitgrad behalten. Wie man bei näherer Betrachtung sieht, erhielten sie deshalb ein divergentes Zusatzmoment, welches sie durch „Abschneiden“, wie damals üblich, konvergent machten; so kamen sie in die richtige Größenordnung.

Quantentheoretisch, aber nicht relativistisch befriedigend führte erstmal Luttinger (1948)⁶⁾ entsprechende Rechnungen mit pseudoskalarem Mesonfeld durch. Luttinger berechnete mit dem alten, auf Schrödinger zurückgehenden Störungsverfahren die mesische Selbstenergie W eines Nukleons im Grundzustand im homogenen Magnetfelde H bis zur zweiten Ordnung in der Kopplungskonstanten. Er erhielt:

$$W = W_0 + W_1 H + W_2 H^2 + \dots$$

W_0 ist die (divergente) Selbstenergie für $H = 0$; das Glied $W_1 H$ wird als potentielle Energie des magnetischen Dipols im Felde H gedeutet, $W_1 (= \mu' \mu_0)$ ist also schon das gesuchte Zusatzmoment. Luttinger fand endliche Zusatzmomente μ' nur im erwähnten Grundzustand. Seine Ergebnisse können jedoch die empirischen Befunde nicht befriedigend darstellen.

Die gleichen Ergebnisse wie Luttinger, aber jetzt ohne Auszeichnung des Grundzustandes, erhielten bald darauf Geheniau-Villars (1949)⁷⁾ und Case (1949)⁸⁾ unter Benutzung des neuen, relativistisch invarianten Störungsformalismus. Geheniau-Villars berechneten in enger Anlehnung an Schwingers Berechnung der elektromagnetischen Selbstenergie des Elektrons ohne äußeres Feld die mesische Selbstenergie des Protons im äußeren, homogenen elektromagnetischen Feld und fanden die Luttingerschen Korrekturglieder wieder. — Case arbeitete mit dem Dysonschen Formalismus; er berechnete ebenfalls die mesische Selbstenergie der Nukleonen im äußeren Felde. Case konnte das Luttingersche Resultat noch aufspalten in zwei Summanden, die in gewissem Sinne den Beitrag der elektrischen Ladung des Mesons bzw. Protons zu μ' darstellen. Case hat außer der Kopplung der Nukleonen an das pseudoskalare Mesonfeld noch die Kopplung an das skalare Mesonfeld behandelt.

2. Zur Methode

Im Hinblick auf den Mißerfolg der bisherigen Versuche, quantitativ die in Rede stehenden Anomalien aus einer (von der Theorie der Kernkräfte am ehesten als brauchbar bezeichneten) pseudoskalaren Mesontheorie herzuleiten, schien es angezeigt, noch auf einem anderen Wege unter den gleichen Voraussetzungen wie bisher eine von den bisherigen möglichst unabhängige Berechnung von μ' durchzuführen. Ich gehe dabei statt über die Selbstenergie im äußeren Felde über den Erwartungswert des Operators der elektrischen Stromdichte, der bis zu der zweiten

⁵⁾ Heitler, Fröhlich, Kemmer, Proc. Roy. Soc. London (A) **166**, 170 (1938).

⁶⁾ J. M. Luttinger, Helv. Phys. Acta **21**, 483 (1948).

⁷⁾ J. Geheniau-F. Villars, Helv. phys. Acta **22**, 178 (1949).

⁸⁾ K. M. Case, Physic. Rev. **76**, 1 (1949).

Ordnung in der Kopplungskonstanten g berechnet wird und aus welchem man auch im Falle der Abwesenheit äußerer elektromagnetischer Felder die Magnetisierung entnehmen kann⁹⁾. Letztere Möglichkeit beruht wesentlich auf der „Gordonschen-Stromzerlegung“. Diese besagt: genügen $\psi, \bar{\psi}$ ($\bar{\psi} = \psi^* \gamma_4$) den Gleichungen:

$$(\gamma_\nu \partial_\nu + K_0) \psi = 0; \quad (\gamma_\nu^T \partial_\nu - K_0) \bar{\psi} = 0 \quad (1)$$

$(\partial_\nu = \frac{\partial}{\partial x_\nu}; \quad (\gamma_\nu^T)_{\alpha\beta} = (\gamma_\nu)_{\beta\alpha} \alpha, \beta$ sind Spinor-Indizes; x_ν ist Komponente eines Vierervektors; es ist: $x_\nu x_\tau = x_\tau^2 = x_1 x_1 + x_2 x_2 + x_3 x_3 - x_0 x_0$), so gilt die Identität:

$$\bar{\psi} \gamma_\mu \psi \equiv \frac{1}{2 K_0} (\partial_\mu \bar{\psi} \cdot \psi - \bar{\psi} \partial_\mu \psi) - \frac{1}{2 K_0} \partial_\nu (\bar{\psi} \sigma_{\mu\nu} \psi); \quad (\mu \neq \nu) \quad (2)$$

mit $\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu)$. Auf Grund der zu den angeschriebenen Feldgleichungen (1) gehörigen Lagrange-Dichte ist die elektrische Stromdichte: $j_\mu \sim \bar{\psi} \gamma_\mu \psi$. Vergleicht man dies mit der in der Maxwellschen Theorie auftretenden Zerlegung der elektrischen Stromdichte j_μ in „Bahnstrom“ i_μ und „Magnetisierungsstrom“ $\partial_\nu M_{\mu\nu}$:

$$j_\mu = i_\mu + \partial_\nu M_{\mu\nu}; \quad (\mu \neq \nu) \quad (3)$$

so wird man dazu geführt, den ersten Summanden der rechten Seite von (2) als „Bahnstrom“, $\frac{1}{2 K_0} \bar{\psi} \sigma_{\mu\nu} \psi$ aber als „Magnetisierung“ anzusehen. So kann man der Gordonschen Stromzerlegung entnehmen, daß der durch (1) beschriebenen Materie im nichtrelativistischen Grenzfall ein magnetisches Spin-Moment von $\frac{1}{2 K_0}$ pro Ladungseinheit, also von $1 \mu_0 = \frac{e}{2 K_0}$ pro Elementarteilchen eigen ist. Unten werden wir finden, daß sich die elektrische Gesamtstromdichte in der Form schreiben läßt:

$$j_\mu \sim \frac{1}{2 K_0} [(\partial_\mu \bar{\psi} \cdot \psi - \bar{\psi} \partial_\mu \psi) - (1 + \mu') \partial_\nu (\bar{\psi} \sigma_{\mu\nu} \psi)]; \quad (\mu \neq \nu) \quad (4)$$

($\psi, \bar{\psi}$ genügen (1)). Dann kann man ebenso wie vorhin einsehen, daß das magnetische Spin-Moment eines Elementarteilchens in dieser Theorie $\mu = (1 + \mu') \mu_0$ ist.

Auch im mathematischen Formalismus unterscheidet sich die hier skizzierte Rechnung von denen von Case und Geheniau-Villars; wir lösen die Feldgleichungen ohne „Wechselwirkungsdarstellung“ in der „Heisenberg-Darstellung“ nach einer Methode von Källén¹⁰⁾. Källén hat die mathematische Äquivalenz seiner Methode mit der Schwingerschen und auch mit der Dyson'schen bewiesen; das Vorgehen Källéns hat zumindest in diesem Falle zweifellos den Vorzug größerer Einfachheit und Durchsichtigkeit, weshalb hier danach verfahren werden soll. Man geht in die Feldgleichungen ein mit Potenzreihenent-

⁹⁾ Übrigens ist Schrödinger, l. c. ebenfalls über die elektrische Stromdichte zur elektromagnetischen Strahlungskorrektur des magnetischen Moments des Dirac-Teilchens gekommen. Seine Integrationsmethode ist aber hier nicht anwendbar. Vgl. auch: W. Pauli, F. Villars, Rev. Mod. Phys. 21, 434 (1949).

¹⁰⁾ G. Källén, Arkiv för Fysik 2, 187 (1950); 2, 371 (1950).

wicklungen der Feldfunktionen (genauer Operator-Funktionen) F nach Potenzen der Kopplungskonstanten g :

$$F = F^{(0)} + g F^{(1)} + g^2 F^{(2)} + \dots$$

Koeffizientenvergleich gibt ein System von Feldgleichungen, welches mit zwei Greenschen Funktionen rekursiv lösbar ist, d. h. $F^{(1)}, F^{(2)}, \dots$ lassen sich durch Integrale über die $F^{(0)}$ darstellen. Die $F^{(0)}$ aber genügen den „ungekoppelten“ Feldgleichungen, deshalb kann man für sie sofort die invarianten Vertauschungsregeln und, wie Schwinger¹¹⁾ gezeigt hat, die Vakuum-Erwartungswerte für Größen der Form $F^{(0)*} \cdot F^{(0)}$ bzw. $\bar{F}^{(0)} F^{(0)}$ angeben. Ferner findet man bei Schwinger¹¹⁾ einfache Regeln zur Berechnung der Erwartungswerte komplizierterer Operatoren für null Teilchen, ein Teilchen usw. Ich erläutere diese Regeln unten an einem einfachen Beispiel, möchte jedoch hier kurz andeuten, auf welchem Wege man (speziell für Operatoren aus $\psi, \bar{\psi}$) zu ihrer Begründung kommen kann.

Zunächst kann man mit Hilfe der Vertauschungsregeln für $\psi, \bar{\psi}$ feststellen, daß der Operator $\psi(x)$, angewandt auf eine Schrödinger-Funktion Φ_N (Φ_N beschreibt einen Zustand mit fester Teilchen-Zahl N), eine Schrödinger-Funktion $\Phi_{N \pm 1}$ herstellt, welche entweder ein Teilchen mehr oder ein Antiteilchen weniger enthält als Φ_N . Man sagt etwas mißverständlich: „Der Operator $\psi(x)$ erzeugt am Ort x ein Teilchen oder vernichtet am gleichen Ort ein Antiteilchen“. Der Operator $\bar{\psi}(x)$ gehört zum inversen Prozeß. Man kann also $\psi, \bar{\psi}$ aufspalten in „Vernichtungs- und Erzeugungs-Operatoren“. Im Impulsraum gelten für diese Operatoren sehr einfache Vertauschungsregeln. Man beachte, daß die Funktionen $\Phi_N(k_1 \dots k_N)$ mit fester Teilchenzahl N und bestimmten Impulsen $k_1 \dots k_N$ der Teilchen ein orthogonales, normiertes Funktionen-System bilden. Ein Vernichtungsoperator, angewandt auf eine Funktion Φ , welche das zu vernichtende Teilchen mit dem bestimmten Impuls nicht enthält, gibt null. Konsequente Anwendung dieser Beziehungen führt auf Rechenregeln folgender Art.

Seien etwa der Vakuum- und der Einteilchen-Erwartungswert, $\langle A \rangle_0$ und $\langle A \rangle_1$, des Operators $A = \bar{\psi}_\alpha \bar{\psi}_\beta \psi_\gamma \psi_\delta$ zu berechnen (die Indizes an den ψ sind Spinor-Indizes; der Index (0) aus der Entwicklung nach g ist weggelassen; die ψ hängen natürlich noch von den Orts-Koordinaten ab). Es ist dann:

$$\langle A \rangle_0 = + \langle \bar{\psi}_\beta \psi_\gamma \rangle_0 \langle \bar{\psi}_\alpha \psi_\delta \rangle_0 - \langle \bar{\psi}_\beta \psi_\delta \rangle_0 \langle \bar{\psi}_\alpha \psi_\gamma \rangle_0,$$

d. h. in der oben erläuterten Sprechweise: A enthält ein Element, in welchem ψ_δ bzw. ψ_γ aus dem Vakuum je ein Teilchen erzeugen, welches von $\bar{\psi}_\alpha$ bzw. $\bar{\psi}_\beta$ wieder vernichtet wird (Vakuum-Schwankung), und ein zweites Element, in welchem die von ψ_δ bzw. ψ_γ erzeugten Teilchen von $\bar{\psi}_\beta$ bzw. $\bar{\psi}_\alpha$ vernichtet werden. Alle übrigen Elemente von A tragen zum Vakuum-Erwartungswert nichts bei. Die Größen der Form $\langle \bar{\psi} \psi \rangle_0$ sind aber bekannt und werden unten angegeben. — Weiter er-

¹¹⁾ J. Schwinger, Physic. Rev. **75**, 651 (1949). Bereits einige Jahre vor Schwinger hat die japanische Schule anscheinend wesentliche Teile der hier zitierten Schwinger-schen Arbeiten entwickelt gehabt. Obwohl die betreffenden Veröffentlichungen selbst mir nicht vorliegen, möchte ich nicht versäumen, sie hier zu zitieren: S. Tomonaga, Progr. Theor. Phys. **1**, 27 (1946); Koba, Tati, Tomonaga, Progr. Theor. Phys. **2**, 101, 198 (1947); S. Kanesawa, S. Tomonaga, Progr. Theor. Phys. **3**, 1, 101 (1948).

hält man:

$$\begin{aligned}\langle A \rangle_1 = & + [\bar{\psi}_\beta \psi_\gamma]_1 \langle \bar{\psi}_\alpha \psi_\delta \rangle_0 - [\bar{\psi}_\beta \psi_\delta]_1 \langle \bar{\psi}_\alpha \psi_\gamma \rangle_0 \\ & + \langle \bar{\psi}_\beta \psi_\gamma \rangle_0 [\bar{\psi}_\alpha \psi_\delta]_1 - \langle \bar{\psi}_\beta \psi_\delta \rangle_0 [\bar{\psi}_\alpha \psi_\gamma]_1 \\ & + \langle \bar{\psi}_\beta \psi_\gamma \rangle_0 \langle \bar{\psi}_\alpha \psi_\delta \rangle_0 - \langle \bar{\psi}_\beta \psi_\delta \rangle_0 \langle \bar{\psi}_\alpha \psi_\gamma \rangle_0,\end{aligned}$$

d. h. zu $\langle A \rangle_1$ tragen die Elemente aus A mit folgender Bedeutung bei (in der aufgeschriebenen Reihenfolge):

1. $\bar{\psi}_\alpha \psi_\delta$ „erzeugt“ eine Vakuumsschwankung; $\bar{\psi}_\beta \psi_\gamma$ „erzeugt“ einen Quantensprung des reell vorhandenen Teilchens.

2. $\bar{\psi}_\alpha \psi_\gamma$ „erzeugt“ eine Vakuumsschwankung; $\bar{\psi}_\beta \psi_\delta$ „erzeugt“ einen Quantensprung des reell vorhandenen Teilchens.

3. $\bar{\psi}_\beta \psi_\gamma$ „erzeugt“ eine Vakuumsschwankung; $\bar{\psi}_\alpha \psi_\delta$ „erzeugt“ einen Quantensprung des reell vorhandenen Teilchens.

4. $\bar{\psi}_\beta \psi_\delta$ „erzeugt“ eine Vakuumsschwankung; $\bar{\psi}_\alpha \psi_\gamma$ „erzeugt“ einen Quantensprung des reell vorhandenen Teilchens.

5. $\bar{\psi}_\beta \psi_\gamma$ „erzeugt“ eine Vakuumsschwankung; $\bar{\psi}_\alpha \psi_\delta$ „erzeugt“ eine Vakuumsschwankung.

6. $\bar{\psi}_\beta \psi_\delta$ „erzeugt“ eine Vakuumsschwankung; $\bar{\psi}_\alpha \psi_\gamma$ „erzeugt“ eine Vakuumsschwankung.

Die Elemente 5., 6. sind offensichtlich Vakuum-Terme und werden, entsprechend den Vorschriften der Löcher-Theorie, weggelassen, wie in folgendem alle Vakuum-Terme. Die Größen $[\bar{\psi}\psi]_1$ haben die Bedeutung: $[\bar{\psi}\psi]_1 = \langle \bar{\psi}\psi \rangle_1 - \text{Vak.}$ und bilden, multipliziert mit den entsprechenden Vakuum-Erwartungswerten, die „Einteilchen-Terme“ von A . Sie können so stehen bleiben; es sind Operatoren, welche sich nur auf das eine, reell vorhandene Teilchen beziehen. — In entsprechender Weise verfährt man mit allen anderen auftretenden Operatoren.

Die erwähnten Regeln lauten allgemein: Man fasse die Operatoren $\psi, \bar{\psi}, U, \dots$ des zu untersuchenden Operators auf alle möglichen Weisen zu Paaren zusammen, so daß jedes Paar entweder eine Vakuumsschwankung oder einen Quantensprung des evtl. reell vorhandenen Teilchens „erzeugt“. Operatoren $\psi, \bar{\psi}, U, \dots$, welche zu verschiedenen Teilchen gehören, antikommutieren „effektiv“, falls beide Faktoren Nukleonfeld-Operatoren sind, sie kommutieren „effektiv“, falls einer der Faktoren oder beide Meson- oder Photon-Feldoperatoren sind. Der gesuchte Erwartungswert ist dann die Summe aller möglichen Kombinationen, nachdem die Paare, welche Vakuumsschwankungen erzeugen, durch den zugehörigen Vakuum-Erwartungswert, die anderen Paare im Falle des Einteilchen-Erwartungswertes durch den zugehörigen Einzelchen-Term $[\dots]_1$ ersetzt sind.

Die in den Erwartungswerten des elektrischen Stromes auftretenden Integrale können mit Hilfe einer naheliegenden Verallgemeinerung einer Methode ausgewertet werden, welche z. B. bei Matthews¹²⁾ und Pauli-Villars¹³⁾ zu finden ist. Bei diesen Integrationen treten unbestimmte Ausdrücke der Form $(\infty - \infty)$ auf, welche sich elementar auswerten lassen; doch hat sich an anderen Beispielen (z. B. der elektronischen Selbstenergie des Photons) gezeigt, daß das Resultat solcher

¹²⁾ P. T. Matthews, Physic. Rev. **76**, 1657 (1949).

¹³⁾ W. Pauli-F. Villars, l. c.

Rechnungen wesentlich abhängt von der Integrationsmethode, also eine gewisse Willkür in dem unbestimmten Ausdruck bleibt. (Mathematisch gesprochen, hat man es mit „bedingt konvergenten“ Integralen zu tun.) Um diese Willkür zu beseitigen, führten Pauli-Villars¹³⁾ eine „formale Regularisierung“ ein, welche in einer Vorschrift besteht, solche unbestimmten Ausdrücke auszuwerten. Die Anwendung dieser Vorschrift auf das Problem der elektronischen Selbstenergie des Photons (Vakuum-Polarisation) und auf das des anomalen magnetischen Momentes des Elektrons führte zu den richtigen, von Schwinger schon mit seiner speziellen Integrationsmethode erhaltenen Resultaten. Wir können zeigen, daß unsere Resultate, welche mit den Caseschen völlig identisch sind, gegenüber dieser Regularisierung invariant sind. Es muß betont werden, daß diese Regularisierung ein völlig neues Element in die Theorie bringt, welches natürlich mit dem Problem der „realen Regularisierung“ der gesamten Theorie zusammenhängt. Es ist nicht ausgeschlossen, daß Resultate, welche nach den Vorschriften der formalen Regularisierung gewonnen sind, in einer späteren Theorie ohne Divergenzen nicht unwesentlich geändert werden.

Wir formulieren ferner unsere Theorie sofort „ladungssymmetrisch“, d. h. so, daß alle Aussagen der Theorie gegenüber Umkehrung des Vorzeichens der elektrischen Ladung invariant sind. Man führt zu diesem Zweck die zu $\psi, \bar{\psi}$ „ladungskonjugierten“ Spinoren $\psi', \bar{\psi}'$ ein [vgl. z. B. Schwinger¹⁴⁾]. Die $\psi, \bar{\psi}$ sollen den Feldgleichungen genügen, welche durch Umkehr des Zeichens von e aus denen für $\bar{\psi}, \psi$ entstehen, also:

$$\begin{aligned} (\gamma_\nu D_\nu + K_0) \psi &= 0; \quad (\gamma_\nu D_\nu^* + K_0) \psi' = 0; \\ (\gamma_\nu^T D_\nu^* - K_0) \bar{\psi} &= 0; \quad (\gamma_\nu^T D_\nu - K_0) \bar{\psi}' = 0; \end{aligned} \quad (7)$$

($D_\nu \equiv \partial_\nu - ie A_\nu$; $D_\nu^* \equiv \partial_\nu + ie A_\nu$; A_ν = elektromagnetisches Vektorpotential). An diesen Gleichungen erkennt man, daß:

$$\psi' = C \bar{\psi}; \bar{\psi}' = C^{-1} \psi,$$

wenn C eine Matrix ist, für welche gilt:

$$C^{-1} \gamma_\mu C = -\gamma_\mu^T; \quad (8)$$

ferner muß man fordern:

$$C^T = -C.$$

Hieraus folgt u. a.: $\bar{\psi}' \psi' = -\psi \bar{\psi}$; $\bar{\psi}' \gamma_\mu \psi' = \gamma_\mu \psi \cdot \bar{\psi}$. Ladungskonjugiert zu U ist bekanntlich U^* , wenn U ein komplexes Mesonfeld beschreibt. Neben der mesischen Ladung g des Nukleons muß man auch die des Antinukleons g' einführen und kann dann die durch eine lorentz- und eichinvariante Langrangedichte L ($e, g, \psi, \dots, U, \dots$) charakterisierte Theorie ladungsinvariant machen, indem man die Lagrange-Dichte ersetzt durch

$$L(e, g, \psi, \dots, U, \dots) + L(-e, g', \psi', \dots, U', \dots). \quad (9)$$

In einer vernünftigen Theorie muß zwischen g und g' eine bestimmte Beziehung bestehen, sie lautet, wie Case¹⁵⁾ zeigte, bei unserer Kopplung: $g = g'$.

¹⁴⁾ J. Schwinger, Physic. Rev. 74, 1439 (1948).

¹⁵⁾ K. M. Case, l. c.

In der skizzierten Weise untersuchen wir die Folgen der skalaren Kopplung des Nukleonen-Dirac-Feldes an ein reelles skalares Mesonfeld bezüglich der auftretenden Zusatzmomente. Wir wählen diese einfachste Kopplung, um die Methode zunächst ohne unnötige Komplikationen möglichst einfach darlegen zu können. In einer Fortsetzung dieser Arbeit werden die entsprechenden Rechnungen für komplexes skalares, sowie für reelles und komplexes pseudoskalares Mesonfeld durchgeführt und die Ergebnisse aller vier Fälle im Zusammenhang diskutiert.

3. Skalares, reelles Mesonfeld, gekoppelt an das Protonfeld

A) Aufstellung und Lösung der Feldgleichungen

Wir beginnen mit der Lagrange-Dichte:

$$\left. \begin{aligned} L &= L_0 + L_M + \bar{L}; \\ L_0 &= -\frac{1}{2} \partial_\nu A_\mu \partial_\nu A_\mu - \frac{1}{2} \bar{\psi} (\gamma_\nu D_\nu + K_0) \psi - \frac{1}{2} \bar{\psi}' (\gamma_\nu D_\nu^* + K_0) \psi'; \\ L_M &= -\frac{1}{2} (\partial_\mu U \cdot \partial_\mu U + K^2 UU); \quad \bar{L} = \frac{g}{2} U (\bar{\psi} \psi + \bar{\psi}' \psi'). \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

L ist nach der Vorschrift (9) gebildet; ferner lorentz- und eichinvariant. L_0 ist eine der zur Grundlegung der Quantenelektrodynamik geeigneten Lagrange-Dichten (vgl. z. B. Schwinger¹⁶⁾) $\psi, \bar{\psi}$ beschreiben das Protonfeld. U beschreibt das reelle Mesonfeld¹⁷⁾. Ein Neutronenfeld $\varphi, \bar{\varphi}$ habe ich vorläufig noch nicht eingeführt; ich werde dies in Abschnitt 4 tun.

Die Forderung: $\int L(x) d^4x = \text{Extr.}$ lässt sich mit dem L aus (10) unter Benutzung von (8) erfüllen durch das System:

$$\left. \begin{aligned} (\gamma_\nu D_\nu + K_0) \psi &= g \psi U; \quad (\gamma_\nu^T D_\nu^* - K_0) \bar{\psi} = -g \bar{\psi} U; \\ (\square - K^2) U &= -\frac{g}{2} [\bar{\psi}, \psi]; \quad \square A_\mu = -\frac{ie}{2} [\bar{\psi}, \gamma_\mu \psi]; \end{aligned} \right\} \quad (12a)$$

hier ist: $[a, b] \equiv ab - ba$; $\{a, b\} \equiv ab + ba$.

Aus den kanonischen Vertauschungsregeln folgt: $[\psi(x), U(x)] = 0$; $[\bar{\psi}(x), U(x)] = 0$; statt $\psi(x)U(x)$ kann man also jederzeit auch schreiben $\frac{1}{2}\{\psi(x), U(x)\}$ und entsprechend statt $\bar{\psi}(x)U(x)$ auch $\frac{1}{2}\{\bar{\psi}(x), U(x)\}$. Diese Vertauschbarkeit gilt i. a. nicht mehr für die einzelnen Glieder der jetzt einzuführenden Entwicklungen der Feldfunktionen; deshalb ist es von Bedeutung, wenn wir vor Einsetzen der Entwicklungen unsere Feldgleichungen überführen in:

$$\left. \begin{aligned} (\gamma_\nu \partial_\nu + K_0) \psi &= \frac{g}{2} \{\psi, U\}; \quad (\gamma_\nu^T \partial_\nu - K_0) \bar{\psi} = -\frac{g}{2} \{\bar{\psi}, U\}; \\ (\square - K^2) U &= -\frac{g}{2} [\bar{\psi}, \psi]; \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

es hat dies zur Folge, daß der Operator der elektrischen Stromdichte

$$j_\mu = \frac{ie}{2} [\bar{\psi}, \gamma_\mu \psi] \quad (13)$$

¹⁶⁾ J. Schwinger, l. c.

¹⁷⁾ g hängt mit dem bei Case verwendeten f_4 zusammen durch $g = \sqrt{2} f_4$; ferner benutzen wir: $\hbar = c = 1$.

zumindest bis zur Ordnung g^2 ladungssymmetrisch wird, was bei den Feldgleichungen (12a) nicht der Fall war. In (12) haben wir noch in den Nukleon-Feldgleichungen $e = 0$ gesetzt; wir wollen ja nur die „mesischen Strahlungskorrekturen“ zu j_μ berechnen.

Wir machen nun den Ansatz:

$$\left. \begin{aligned} \psi &= \psi^{(0)} + g \psi^{(1)} + g^2 \psi^{(2)} + \dots \\ \bar{\psi} &= \bar{\psi}^{(0)} + g \bar{\psi}^{(1)} + g^2 \bar{\psi}^{(2)} + \dots \\ U &= U^{(0)} + g U^{(1)} + g^2 U^{(2)} + \dots \\ j_\mu &= j_\mu^{(0)} + g j_\mu^{(1)} + g^2 j_\mu^{(2)} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

und erhalten damit aus (12)

$$\left. \begin{aligned} (\gamma_\nu \partial_\nu + K_0) \psi^{(0)} &= 0; (\gamma_\nu^T \partial_\nu - K_0) \bar{\psi}^{(0)} = 0; (\square - K^2) U^{(0)} = 0; \\ (\gamma_\nu \partial_\nu + K_0) \psi^{(1)} &= \frac{1}{2} \{ \psi^{(0)}, U^{(0)} \}; (\gamma_\nu^T \partial_\nu - K_0) \bar{\psi}^{(1)} = -\frac{1}{2} \{ \bar{\psi}^{(0)}, U^{(0)} \}; \\ (\square - K^2) U^{(1)} &= -\frac{1}{2} [\bar{\psi}^{(0)}, \psi^{(0)}]; \\ (\gamma_\nu \partial_\nu + K_0) \psi^{(2)} &= \frac{1}{2} [\{ \psi^{(1)}, U^{(0)} \} + \{ \psi^{(0)}, U^{(1)} \}]; \text{ usw.} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Zur Lösung der inhomogenen Gleichungen aus (15) benutzen wir die Greenschen Funktionen $\bar{A}(x)$, $\bar{S}(x)$ und $\bar{S}^T(x)$, zu bestimmen aus:

$$\left. \begin{aligned} (\square - K^2) \bar{A}(x) &= -\delta(x); \\ (\gamma_\nu \partial_\nu + K_0) \bar{S}(x) &= -\delta(x); (\gamma_\nu^T \partial_\nu - K_0) \bar{S}^T(x) = -\delta(x). \end{aligned} \right\} \quad (16a)$$

$\delta(x)$ ist die 4-dimensionale „Diracsche δ -Funktion“ $\delta(x) = \delta(x_0) \delta(x_1) \delta(x_2) \delta(x_3)$. Man schreibt:

$$\bar{S}(x) = (\gamma_\nu \partial_\nu - K_0) \bar{A}_0(x); (\gamma_\nu^T \partial_\nu + K_0) \bar{A}_0(x); (\square - K_0^2) \bar{A}_0(x) = -S(x). \quad (16b)$$

Hier sieht man unmittelbar, daß: $\bar{S}_{\alpha\beta}^T(x) = -\bar{S}_{\beta\alpha}(-x)$. Die Gln. (16a, b) besitzen je 2 linear unabhängige Lösungen, z. B. eine „retardierte“ A_{ret} und eine „avancierte“ A_{av} . Die von uns benutzten \bar{A} sind $\bar{A} = \frac{1}{2} (A_{\text{ret}} + A_{\text{av}})$. Die Funktionen \bar{A} , \bar{A}_0 lassen sich als Fourier-Integrale darstellen:

$$\bar{A}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} P \int \frac{e^{i p_\nu x_\nu}}{k_\nu^2 + K^2} d^4 p; A_0(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} P \int \frac{e^{i p_\nu x_\nu}}{k_\nu^2 + K_0^2} d^4 p; \quad (16b)$$

(diese Integrale sind wie alle folgenden, bei welchen keine Grenzen angeschrieben sind, von $-\infty$ bis $+\infty$ zu erstrecken; $Pf \dots$ bedeutet: An den Polen ist der Hauptwert des Integranden zu nehmen. Die Funktionen A_{ret} , A_{av} , \bar{A} unterscheiden sich nur durch den verschiedenen Integrationsweg an den Polen, vgl. Källén¹⁸⁾). Die spezielle Wahl von \bar{A} , \bar{A}_0 wie (16) garantiert die Erfüllung dieser Randbedingungen:

$$\left. \begin{aligned} F^{(n)}(x) &\rightarrow 0 \quad \text{für } x_0 \rightarrow -\infty \\ F^{(n)}(x) \Phi &\rightarrow 0 \quad \text{für } x_0 \rightarrow +\infty \end{aligned} \right\} n \neq 0 \quad (17)$$

¹⁸⁾ Wir verwenden: $d^4 p = dp_0 dp_1 dp_2 dp_3$; entsprechend auch weiterhin.

¹⁹⁾ G. Källén, i. e.

(Φ ist die „Schrödinger-Funktion“ des Systems); ($F^{(n)}$ steht an Stelle von $\psi^{(n)}, \bar{\psi}^{(n)}, U^{(n)}, \dots$). Die erste der Bedingungen (17) bedeutet: Die Kopplung ist in der fernen Vergangenheit „eingeschaltet“ worden. Die zweite Bedingung besagt: Es ereignen sich in dem System nur virtuelle, keine reellen Prozesse, also z. B. keine reellen Paarerzeugungen, wohl aber virtuelle (vgl. Källén¹⁹)).

Mit diesen Greenschen Funktionen erhalten wir:

$$\left. \begin{aligned} \psi^{(1)}(x) &= - \int \bar{S}(x-x') U(x') \psi(x') d^4 x'; \\ \bar{\psi}^{(1)}(x) &= - \int U(x') \bar{\psi}(x') \bar{S}(x'-x) d^4 x'; \\ U^{(1)}(x) &= + \frac{1}{2} \int \bar{A}(x-x') [\bar{\psi}(x'), \psi(x')] d^4 x'; \\ \psi^{(2)}(x) &= + \frac{1}{2} \int \int \bar{S}(x-x') \{ U(x'), \bar{S}(x'-x'') U(x'') \psi(x'') \} d^4 x' d^4 x'' \\ &\quad - \frac{1}{2} \int \int \bar{S}(x-x') [\bar{A}(x'-x'') [\bar{\psi}(x''), \psi(x')], \psi(x')] d^4 x' d^4 x''; \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

$\bar{\psi}^{(0)}$ entsprechend. (In den Integranden von (18) ist an den Feldfunktionen überall der Index (0) weggelassen, was auch weiterhin an entsprechenden Stellen geschehen wird.)

B) Berechnung der Erwartungswerte

Da die $F^{(0)}(x)$ den homogenen, ungekoppelten Feldgleichungen genügen, kennt man ihre invarianten Vertauschungsregeln bereits. Zur Berechnung der Grundformen von Vakuum-Erwartungswerten kann man, genau wie bei Tomonaga²⁰ und Schwinger²¹ gezeigt, vorgehen und erhält (vgl. auch Källén²²):

$$\left. \begin{aligned} [U^{(0)}(x), U^{(0)}(x')] &= iA(x-x'); \{ \psi_\alpha^{(0)}(x), \psi_\beta^{(0)}(x') \} = -iS_{\alpha\beta}(x'-x); \\ \{\bar{\psi}^{(0)}, \bar{\psi}^{(0)}\} &= \{\psi^{(0)}, \psi^{(0)}\} = [U^{(0)}, \psi^{(0)}] = [U^{(0)}, \bar{\psi}^{(0)}] = 0; \end{aligned} \right\} \quad (19a)$$

$$\left. \begin{aligned} \langle \{U^{(0)}(x), U^{(0)}(x')\} \rangle_0 &= A^{(1)}(x-x'); \\ \langle U^{(0)}(x) U^{(0)}(x') \rangle_0 &= iA^{(+)}(x-x'); \\ \langle [\bar{\psi}_\alpha^{(0)}(x), \psi_\beta^{(0)}(x')] \rangle_0 &= S_{\beta\alpha}^{(1)}(x'-x); \\ \langle \bar{\psi}_\alpha^{(0)}(x) \psi_\beta^{(0)}(x') \rangle_0 &= -iS_{\beta\alpha}^{(-)}(x'-x); \\ \langle \psi_\alpha^{(0)}(x) \bar{\psi}_\beta^{(0)}(x') \rangle_0 &= -iS_{\alpha\beta}^{(+)}(x-x'). \end{aligned} \right\} \quad (19b)$$

Die hier auftretenden invarianten A -Funktionen können so dargestellt werden (vgl. auch (16)):

$$\left. \begin{aligned} A^{(1)}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{ik_\nu x_\nu} \delta(k_\nu^2) d^4 k; \quad A(x) = -2 \frac{x_0}{|x_0|} \bar{A}(x); \\ A^{(+)} &= \frac{1}{2} (A - iA^{(1)}); \quad A^{(-)} = \frac{1}{2} (A + iA^{(1)}); \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

sie haben die Eigenschaften:

$$A(x) = -A(-x); \quad A^{(1)}(x) = +A^{(1)}(-x); \quad \bar{A}(x) = +\bar{A}(-x); \quad A^{(+)}(x) = -A^{(+)}(-x).$$

Die S -Funktionen sind ganz entsprechend definiert.

Nach dem in Abschnitt 2 erläuterten Schema sollen jetzt die Erwartungswerte von $j_\mu^{(0)}, j_\mu^{(1)}, j_\mu^{(2)}$ für ein Proton, null Mesonen berechnet werden.

$$j_\mu^{(0)}(x) = \frac{i e}{2} [\bar{\psi}^{(0)}(x), \gamma_\mu \psi^{(0)}(x)] \quad (21a)$$

²⁰ S. Tomonaga, l. c.

²¹ J. Schwinger, l. c.

²² G. Källén, l. c.

ist schon ein typischer Einteilchen-Operator; wir schreiben:

$$\langle j_\mu^{(0)}(x) \rangle_{1,0} = \frac{i e}{2} [\bar{\psi}^{(0)}(x), \gamma_\mu \psi^{(0)}(x)]_1. \quad (21)$$

Weiter ist:

$$j_\mu^{(1)}(x) = \frac{i e}{2} [\bar{\psi}^{(1)}, \gamma_\mu \psi^{(0)}] + \frac{i e}{2} [\bar{\psi}^{(0)}, \gamma_\mu \psi^{(1)}]. \quad (22a)$$

Da $j_\mu^{(1)} \sim \int \dots U^{(0)} \dots$ und natürlich $\langle U^{(0)} \rangle_0 = 0$, folgt:

$$\langle j_\mu^{(1)} \rangle_{1,0} = 0. \quad (22)$$

Bleibt zu untersuchen:

$$\begin{aligned} j_\mu^{(2)} &= \frac{i e}{2} \{ [\bar{\psi}^{(1)}, \gamma_\mu \psi^{(1)}] + [\bar{\psi}^{(0)}, \gamma_\mu \psi^{(2)}] + [\bar{\psi}^{(2)}, \gamma_\mu \psi^{(0)}] \}; \\ [\bar{\psi}^{(1)}(x), \gamma_\mu \psi^{(1)}(x)] &= \iint [\bar{\psi}(x') \bar{S}(x' - x) U(x'), \gamma_\mu \bar{S}(x - x'') \psi(x'')] \\ &\quad \cdot U(x'')] d^4 x' d^4 x''; \\ [\bar{\psi}^{(0)}(x), \gamma_\mu \psi^{(2)}(x)] &= + \frac{1}{2} \iint [\bar{\psi}(x), \gamma_\mu \bar{S}(x - x') \{ U(x'), \bar{S}(x' - x'') \\ &\quad \cdot U(x'') \psi(x'') \}] d^4 x' d^4 x'' \\ &\quad - \frac{1}{4} \iint [\bar{\psi}(x), \gamma_\mu \bar{S}(x - x') \{ [\bar{\psi}(x''), \psi(x'')], \\ &\quad \psi(x'')] \}] \bar{A}(x' - x'') d^4 x' d^4 x''; \end{aligned} \quad (23a)$$

$[\bar{\psi}^{(2)}, \gamma_\mu \psi^{(0)}]$ entsprechend.

Die etwas umständliche, aber elementare Berechnung der fraglichen Erwartungswerte liefert unter Benutzung von (19a, b und 20) das Resultat:

$$\begin{aligned} &[\bar{\psi}^{(1)}(x), \gamma_\mu \psi^{(1)}(x)]_{1,0} \\ &= \frac{1}{2} \iint [\bar{\psi}(x'), \bar{S}(x' - x) \gamma_\mu \bar{S}(x - x'') \psi(x'')]_1 \bar{A}^{(1)}(x' - x'') \\ &\quad \cdot d^4 x' d^4 x''; \\ &[\bar{\psi}^{(0)}(x), \gamma_\mu \psi^{(2)}(x)]_{1,0} \\ &= \frac{1}{2} \iint [\bar{\psi}(x), \gamma_\mu \bar{S}(x - x') \bar{S}(x' - x'') \psi(x'')]_1 \bar{A}^{(1)}(x' - x'') \\ &\quad \cdot d^4 x' d^4 x'' \\ &\quad - \frac{1}{2} \iint [\bar{\psi}(x), \gamma_\mu \bar{S}(x - x') \psi(x')]_1 \text{Sp}(S^{(1)}(0)) \bar{A}(x' - x'') d^4 x' d^4 x'' \\ &\quad - \frac{1}{2} \iint [\bar{\psi}(x''), \psi(x'')]_1 \text{Sp}(\gamma_\mu \bar{S}(x - x') S^{(1)}(x' - x)) \bar{A}(x' - x'') \\ &\quad \cdot d^4 x' d^4 x'' \\ &\quad + \frac{1}{2} \iint [\bar{\psi}(x), \gamma_\mu \bar{S}(x - x') S^{(1)}(x' - x'') \psi(x'')]_1 \bar{A}(x' - x'') \\ &\quad \cdot d^4 x' d^4 x'' \\ &\quad + \frac{1}{2} \iint [\bar{\psi}(x'), S^{(1)}(x' - x) \gamma_\mu \bar{S}(x - x'') \psi(x'')]_1 \bar{A}(x' - x'') \\ &\quad \cdot d^4 x' d^4 x''; \end{aligned} \quad (23b)$$

entsprechend für $[\bar{\psi}^{(2)}, \gamma_\mu \psi^{(0)}]_{1,0}$. — Die Zusammenfassung liefert:

$$(21) \quad \langle j_\mu^{(0)}(x) \rangle_{1,0} = + \frac{ie}{2} \int [\bar{\psi}(x), \gamma_\mu \bar{S}(x-x') \Phi(x')]_1 d^4 x' \\ + \frac{ie}{2} \int [\bar{\Phi}(x') \bar{S}(x'-x) \gamma_\mu, \psi(x)]_1 d^4 x' \\ + \frac{ie}{2} \int \int [\bar{\psi}(x'), K_\mu(x'-x, x-x'') \psi(x'')]_1 d^4 x' d^4 x'';$$

wo:

$$\Phi(x') = \frac{1}{2} \int (\bar{S}(x'-x'') A^{(1)}(x'-x'') \\ + S^{(1)}(x'-x'') \bar{A}(x'-x'') \psi(x'') d^4 x'' \\ + 2 K_0 A^{(1)}(0) \int \bar{A}(x'-x'') d^4 x'' \cdot \psi(x');$$

$\Phi(x')$ entsprechend;

$$K_\mu(\xi, \eta) = + \bar{S}(\xi) \gamma_\mu \bar{S}(\eta) A^{(1)}(-\xi - \eta) \\ + S^{(1)}(\xi) \gamma_\mu \bar{S}(\eta) \bar{A}(-\xi - \eta) + \bar{S}(\xi) \gamma_\mu S^{(1)}(\eta) \bar{A}(-\xi - \eta).$$

Bei der Auswertung der Spuren wurden folgende Beziehungen benutzt:

$$\text{Sp}(\gamma_\mu) = 0; \quad \text{Sp}(\gamma_\mu \gamma_\nu) = 4 \delta_{\mu\nu}; \quad \text{Sp}(\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\lambda) = 0.$$

C) Auswertung der Integrale

Wir berechnen zuerst: $\Gamma_\mu(x) = \int \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \bar{S}(x-x') \Phi(x') d^4 x'$ mit $\Phi(x')$ aus (23). Sei:

$$\Gamma_\mu(x) = \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \int \int A(x-x', x'-x'') \psi(x'') d^4 x' d^4 x'', \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} (24)$$

dann ist:

$$\begin{aligned} A(\xi, \eta) &= \bar{S}(\xi) [G(\eta) + 2 K_0 K^{-2} A^{(1)}(0) \delta(\eta)]; \\ G(\eta) &= \frac{1}{2} (\bar{S}(\eta) A^{(1)}(\eta) + S^{(1)}(\eta) \bar{A}(\eta)). \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\}$$

Wir denken uns jetzt $\psi(x)$ in eine Fourier-Reihe entwickelt; ein Glied der Reihe sei $a e^{i P_\nu x_\nu}$; der Einfachheit halber schreiben wir $\psi(x) = a e^{i P_\nu x_\nu}$, wo natürlich

$$(i \gamma_\nu P_\nu + K_0) a = 0; \quad P_\nu^2 = -K_0^2 \quad (25)$$

ist. Die zugehörige Fourier-Komponente von Γ_μ nennen wir ebenfalls wieder Γ_μ . Statt $A(\xi, \eta)$ führen wir die Fourier-Transformierte ein durch:

$$\Gamma_\mu(x) = \frac{1}{(2\pi)^8} \int \int \int \bar{\psi}(x) \gamma_\mu A(k, p) \psi(x) e^{i \varphi} d^4 k d^4 p. \quad (26)$$

So kommt:

$$\Gamma_\mu(x) = \frac{1}{(2\pi)^8} \int \int \int \int \bar{\psi}(x) \gamma_\mu A(k, p) \psi(x) e^{i \varphi} d^4 x' d^4 x'' d^4 k d^4 p,$$

mit

$$\begin{aligned} \varphi &= k_\nu(x_\nu - x'_\nu) + p_\nu(x'_\nu - x''_\nu) + P_\nu(x''_\nu - x_\nu) \\ &= x'_\nu(p_\nu - k_\nu) + x''_\nu(P_\nu - p_\nu) + x_\nu(k_\nu - P_\nu). \end{aligned}$$

Die Integration liefert:

$$I_\mu(x) = \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \iint \delta(k_\nu - p_\nu) \delta(p_\nu - P_\nu) \Lambda(k, p) e^{i x_\nu (k_\nu - P_\nu)} d^4 k d^4 p \\ = \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \Lambda(P, P) \psi(x). \quad (27)$$

Nun ist:

$$\Lambda(k, p) = \bar{S}(k) [G(p) + 2 K_0 K^{-2} \Lambda^{(1)}(0)];$$

mit

$$\bar{S}(k) = (i \gamma_\nu k_\nu - K_0) (k_\nu^2 + K_0^2)^{-1}; \\ G(p) = \frac{1}{2(2\pi)^3} \int \left\{ \frac{\delta((p_\nu - q_\nu)^2 + K^2)}{q_\nu^2 + K_0^2} + \frac{\delta(q_\nu^2 + K_0^2)}{(p_\nu - q_\nu)^2 + K^2} \right\} (i \gamma_\nu q_\nu - K_0) d^4 q. \quad (28)$$

Mit den Formeln:

$$P\left(\frac{1}{\tau}\right) = -\frac{i}{2} \int e^{i a \tau} \varepsilon(a) da; \quad \varepsilon(a) = \frac{a}{|a|}; \quad (29a)$$

$$\delta(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int e^{i \omega b} db, \quad (29b)$$

kann man schreiben:

$$G(p) = -\frac{i}{4(2\pi)^4} \iiint e^{i \alpha} (\varepsilon(a) + \varepsilon(b)) (i \gamma_\nu q_\nu - K_0) d^4 q da db,$$

mit:

$$\alpha = b((p_\nu - q_\nu)^2 + K^2) + a(q_\nu^2 + K_0^2).$$

Die folgende Substitution ermöglicht die Integration über q :

$$q_\nu = Q_\nu + \frac{b}{a+b} p_\nu; \quad d^4 Q = d^4 q; \quad \alpha = (a+b) Q_\nu^2 + \frac{a b}{a+b} p_\nu^2 + a K_0^2 + b K^2;$$

$$G(p) = -\frac{i}{4(2\pi)^4} \iiint e^{i \alpha} (\varepsilon(a) + \varepsilon(b)) \left(i \gamma_\nu \left(Q_\nu + \frac{b}{a+b} p_\nu \right) - K_0 \right) d^4 Q da db.$$

Mit den Formeln:

$$\int e^{i a Q_\nu^2} d^4 Q = \frac{i \pi^2}{a^2} \varepsilon(a); \\ \int Q_\lambda Q_\mu e^{i a Q_\nu^2} d^4 Q = 0; \quad \int Q_\lambda Q_\mu e^{i a Q_\nu^2} d^4 Q = -\delta_{\lambda\mu} \cdot \frac{\pi^2}{2 a^3} \varepsilon(a), \quad (30)$$

erhält man:

$$G(p) = +\frac{\pi^2}{4(2\pi)^4} \iiint e^{i \alpha'} (\varepsilon(a) + \varepsilon(b)) \cdot \frac{e(a+b)}{(a+b)^2} \left(i \gamma_\nu p_\nu \frac{b}{a+b} - K_0 \right) da db, \quad (31)$$

mit: $\alpha' = a b (a+b)^{-1} \cdot p_\nu^2 + b K^2 + a K_0^2$.

Wegen $(i \gamma_\nu P_\nu + K_0) a = 0$ enthält $G(P) \psi$, wie man aus (31) abliest, keine γ -Matrizen mehr; also enthält $\Lambda(P, P)$ selbst ebenfalls keine γ -Matrizen mehr und Γ_μ lässt sich schreiben in der Form:

$$\Gamma_\mu(x) = \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x) \cdot C, \quad (32)$$

(27)

wo der evtl. divergente Zahlenfaktor C keine Bedeutung für unsere Berechnung von μ' hat, wie sich später zeigen wird. Wie hier, so werden wir auch weiterhin die Faktoren von Termen der Form $\psi \gamma_\mu \psi$ nicht berechnen, sondern solche Terme suchen, welche eine andere Spin-Abhängigkeit haben.

Analysieren wir jetzt:

$$\Theta_\mu(x) = \iint \bar{\psi}(x') K_\mu(x-x, x-x'') \psi(x'') d^4 x' d^4 x'', \quad (33)$$

(28)

mit K_μ aus (23). Diesmal werden $\psi(x)$ und $\bar{\psi}(x)$ beide in eine Fourier-Reihe entwickelt; wir betrachten ein typisches gemischtes Glied, für welches wir wieder, der Bequemlichkeit halber, Θ_μ schreiben und

$$\left. \begin{aligned} \psi(x) &= a e^{i P_\nu x_\nu}; \quad \bar{\psi}(x) = \bar{b} e^{-i P'_\nu x_\nu}; \\ P_\nu^2 &= P'^2_\nu = -K_0^2; \quad (i \gamma_\nu P_\nu + K_0) a = 0 = \bar{b} (i \gamma_\nu P'_\nu + K_0). \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

(29a)

Weiter führen wir in (33) ein:

$$\left. \begin{aligned} \bar{A}(x) &= (2\pi)^{-4} \int e^{i k_\nu x_\nu} (k_\nu^2 + K^2)^{-1} d^4 k; \\ A^{(1)}(x) &= (2\pi)^{-4} \int e^{i k_\nu x_\nu} \delta(k_\nu^2 + K^2) d^4 k. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

(29b)

Mit den Formeln:

$$\begin{aligned} \int e^{-i k_\nu x_\nu} \cdot \bar{S}(x) d^4 x &= (i \gamma_\nu k_\nu - K_0) (k_\nu^2 + K_0^2)^{-1}; \\ \int e^{-i k_\nu x_\nu} \cdot S^{(1)}(x) d^4 x &= 2\pi (i \gamma_\nu k_\nu - K_0) \delta(k_\nu^2 + K_0^2) \end{aligned}$$

kann man die Integration über x' und x'' in (33) ausführen und erhält:

$$\left. \begin{aligned} \Theta_\mu(x) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int \left\{ \frac{\delta(k_\nu^2 + K^2)}{((P'_\nu + k_\nu)^2 + K_0^2)((P_\nu + k_\nu)^2 + K_0^2)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\delta((P'_\nu + k_\nu)^2 + K_0^2)}{((P_\nu + k_\nu)^2 + K_0^2)(k_\nu^2 + K^2)} + \frac{\delta((P_\nu + k_\nu)^2 + K_0^2)}{((P'_\nu + k_\nu)^2 + K_0^2)(k_\nu^2 + K^2)} \right\} M_\mu(x) d^4 k \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

mit:

$$\begin{aligned} M_\mu(x) &= \bar{\psi}(x) (i \gamma_\nu (P'_\nu + k_\nu) - K_0) \gamma_\mu (i \gamma_\lambda (P_\lambda + k_\lambda) - K_0) \psi(x) \\ &= \bar{\psi}(x) (i \gamma_\nu k_\nu - 2K_0) \gamma_\mu (i \gamma_\lambda k_\lambda - 2K_0) \psi(x) \\ &= \bar{\psi}(x) \cdot 2i k_\mu (i \gamma_\nu k_\nu - 2K_0) \cdot \psi(x) + \sim \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x) \end{aligned}$$

(unter Benutzung von (34) und $\gamma_\nu \gamma_\mu + \gamma_\mu \gamma_\nu = 2 \delta_{\mu\nu}; \gamma_\nu \gamma_\mu \gamma_\nu = -2 \gamma_\mu$). Mit (29a, 29b) wird aus (36):

(31)

$$\Theta_\mu(x) = -\frac{1}{4(2\pi)^4} \iiint e^{i \theta} [\varepsilon(a) \varepsilon(b) + \varepsilon(a) \varepsilon(c) + \varepsilon(b) \varepsilon(c)] M_\mu(x) d^4 k da db dc,$$

wo

$$\theta = a((P'_\nu + k_\nu)^2 + K_0^2) + b((P_\nu + k_\nu)^2 + K_0^2) + c(k_\nu^2 + K^2).$$

Nach der Verschiebung

$$k_\nu = k'_\nu + \alpha_\nu; \quad \alpha_\nu = -(aP'_\nu + bP_\nu)(a + b + c)^{-1} \quad (37a)$$

keine
r und

(32)

läßt sich die Integration über k' mit Hilfe der Formeln (30) sofort ausführen; man erhält unter Beachtung von (34):

$$\Theta_\mu(\xi) = + \frac{\pi^2}{2(2\pi)^4} \iiint e^{i\vartheta'} [\varepsilon(a)\varepsilon(b) + \varepsilon(a)\varepsilon(c) + \varepsilon(b)\varepsilon(c)] \cdot \frac{\varepsilon(a+b+c)}{(a+b+c)^2} M'_\mu(\xi) da db dc, \quad (37)$$

mit:

$$\vartheta' = - \frac{(aP'_\nu + bP_\nu)^2}{a+b+c} + cK^2;$$

$$M'_\mu(\xi) = -K_0 \alpha_\mu \left(1 + \frac{c}{a+b+c}\right) \bar{\psi}(\xi) \psi(\xi) + \sim \bar{\psi} \gamma_\mu \psi.$$

Die restliche Integration läßt sich ausführen nach der Substitution:

$$a = z(1-y-x); \quad b = z(1-y+x); \quad c = z \cdot 2y; \quad (38)$$

$$\text{womit: } a+b+c = 2z; \quad \alpha_\mu = \frac{y-1}{2} \bar{P}_\mu + \frac{x}{2} p_\mu;$$

$$(\text{sei: } \bar{P}_\mu = P'_\mu + P_\mu; \quad p_\mu = P'_\mu - P_\mu);$$

$$M'_\mu = -\frac{K_0}{2} ((y-1) \bar{P}_\mu + x p_\mu) (1+y) \bar{\psi} \psi + \sim \bar{\psi} \gamma_\mu \psi; \quad (39a)$$

$$\vartheta' = zw = z \{-\frac{1}{2}(y-1)^2 \bar{P}_\mu^2 - \frac{1}{2}x^2 p_\mu^2 + 2yK^2\}$$

(man beachte, daß nach (39a):

$$\bar{P}_\mu p_\mu = 0; \quad p_\mu^2 = -\bar{P}_\mu^2 - 4K_0^2); \quad (39b)$$

ferner erhält man: $da db dc = 4z^2 dx dy dz$;

$$(\varepsilon(c)\varepsilon(a) + \varepsilon(c)\varepsilon(b)) = \begin{cases} 0 & \text{für } |x| > |1-y| \\ 2\varepsilon(y) & \text{für } |x| < |1-y| \\ -2 & \text{für } |y| < 1 \\ & \text{für } |y| > 1 \end{cases} \quad (40a)$$

$$\varepsilon(a)\varepsilon(b) = \begin{cases} +1 & \text{für } |x| < |1-y| \\ -1 & \text{für } |x| > |1-y| \end{cases} \quad (40b)$$

Entsprechend den Ausdrücken (40a, b) müssen wir zunächst Θ_μ in zwei Summanden aufspalten:

$$\Theta_\mu(\xi) = \frac{\pi^2 K_0}{4(2\pi)^2} \bar{\psi}(\xi) \psi(\xi) (2I_\mu + II_\mu) + \sim \bar{\psi} \gamma_\mu \psi;$$

$$I_\mu = \left(- \int_{-\infty}^{+1} dy \int_{y-1}^{1-y} dx + \int_{-1}^{+1} \varepsilon(y) dy \int_{y-1}^{1-y} dx - \int_{+1}^{+\infty} dy \int_{1-y}^{y-1} dx \right) \cdot \int_{-\infty}^{+1} dz \varepsilon(z) e^{izw} f_\mu(x, y);$$

$$II_\mu = \left[+ \int_{-\infty}^{+1} dy \left(- \int_{-\infty}^{y-1} dx + \int_{y-1}^{1-y} dx - \int_{1-y}^{+\infty} dx \right) + \int_{+1}^{+\infty} dy \left(- \int_{-\infty}^{1-y} dx + \int_{1-y}^{y-1} dx - \int_{y-1}^{+\infty} dx \right) \right] \int_{-\infty}^{+\infty} dz \varepsilon(z) e^{izw} f_\mu(x, y), \quad (41)$$

mit

$$f_\mu(x, y) = (\bar{P}_\mu(y-1) + p_\mu x)(1+y).$$

Die z -Integration wird ausgeführt mit:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dz \, \varepsilon(z) e^{iz\omega} = \frac{2i}{\omega}; \quad (42)$$

zur x -Integration benutzen wir:

$$(37) \quad \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\alpha - \beta x^2} = G(x_2) - G(x_1); \quad G(x) = \frac{1}{2\sqrt{\alpha\beta}} \cdot \ln \left| \frac{1 + \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} x}{1 - \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} x} \right|. \quad (43)$$

Es ist: $G(x) = -G(-x)$; $G(\pm\infty) = 0$; für uns gilt speziell:

$$\alpha = 2 K^2 y - \frac{1}{2} \bar{P}_\nu^2 (y-1)^2; \quad \beta = \frac{p_\nu^2}{2}.$$

Die von $p_\mu \cdot x$ aus $f_\mu(x, y)$ herrührenden Beiträge zu I_μ und II_μ , (41), verschwinden, da der Integrand bezüglich x ungerade ist, die Integrationsgrenzen aber in x symmetrisch liegen. Nach Ausführung der z - und x -Integration bleibt somit noch:

$$(39a) \quad (2I_\mu + II_\mu) = 8i \bar{P}_\mu \left\{ + \int_{-\infty}^{-1} dy - \int_{-\infty}^{-1} dy + \int_{-1}^{+1} (\varepsilon(y) + 1) dy \right. \\ \left. - \int_{+1}^{+\infty} dy + \int_{+1}^{+\infty} dy \right\} f(y); \quad (44)$$

$$f(y) = G(1-y)(y^2-1).$$

Die weitere Integration läßt sich ausführen, wenn man p_ν^2 sehr klein wählt; für $|\zeta| < 1$ gilt nämlich:

$$\ln \left| \frac{1+\zeta}{1-\zeta} \right| = 2 \left(\zeta + \frac{\zeta^3}{3} + \frac{\zeta^5}{5} + \dots \right),$$

womit:

$$(40a) \quad G(x) = \frac{x}{\alpha} \cdot (1 + \sim p_\nu^2 + \dots). \quad (43b)$$

Mit $p_\nu^2 \approx 0$ ist auch $\bar{P}_\nu^2 \approx -4K_0^2$, (vgl. 39b), so daß

$$(40b) \quad f(y) = (-y^3 + y^2 + y - 1) (2yK^2 + 2K_0^2(y-1)^2)^{-1} + \sim p_\nu^2 + \dots. \quad (44b)$$

Die Beschränkung auf $p_\nu^2 \approx 0$ ist sicher keine Einschränkung der Allgemeinheit; sie ist wohl gleichbedeutend mit der Forderung, ψ möge nicht allzu verschiedene Impulse enthalten, also genähert Materie einheitlicher Geschwindigkeit beschreiben.

Man sieht, daß die uneigentlichen Integrale in (44) mit (44b) für sich divergieren; es ist jedoch plausibel vorbehaltlich genauerer Untersuchung mittels Regularisierung (s. u.), die Summe aller uneigentlichen Integrale in (44) wegzulassen. Es bleibt dann nur:

$$(41) \quad \int_{-1}^{+1} (\varepsilon(y) + 1) f(y) dy = K_0^{-2} \int_0^{+1} (-y^3 + y^2 + y - 1) (y^2 - y(2-\lambda) + 1)^{-1} dy \quad (45a)$$

$$= -K_0^{-2} \cdot c_1(\lambda), \quad \lambda = \frac{K^2}{K_0^2}.$$

Mit bekannten Formeln kommt:

$$(45) \quad c_1(\lambda) = \frac{3}{2} - \lambda + \frac{\lambda}{2} (3 - \lambda) \ln \frac{1}{\lambda} - \frac{\lambda(4 - 5\lambda + \lambda^2)}{(4\lambda - \lambda^2)^{\frac{1}{2}}} \operatorname{arc tg} \left(\frac{4}{\lambda} - 1 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Wir haben also: $(2 I_\mu + II_\mu) = -8 i \bar{P}_\mu K_0^{-2} c_1(\lambda)$; schließlich:

$$\langle j_\mu^{(2)}(x) \rangle_{1,0} = -\frac{c_1(\lambda)}{4(2\pi)^2} \mu_0 \bar{P}_\mu [\bar{\psi}(x), \psi(x)]_1 + N [\bar{\psi}, \gamma_\mu \psi]_1, \quad (46)$$

wo N eine (sicher divergente) Größe ist, deren Berechnung wir uns aber gespart haben. Schreibt man jetzt (2) mit (34), so erhält man speziell:

$$i \bar{b} \gamma_\mu a = \frac{1}{2 K_0} (\bar{P}_\mu \bar{b} a - p_\nu \bar{b} \sigma_{\mu\nu} a), \quad (47a)$$

womit man schließlich den Gesamtstromdichte-Erwartungswert

$$\langle j_\mu \rangle_{1,0} = \langle j_\mu^{(0)} \rangle_{1,0} + g^2 \langle j_\mu^{(2)} \rangle_{1,0} + \sim g^3 + \dots$$

schreiben kann:

$$\langle j_\mu \rangle_{1,0} = \mu_0 \left\{ (\bar{N} + 1) \bar{P}_\mu [\bar{b}, a]_1 - \left(\bar{N} + 1 + \frac{c_1(\lambda)}{4(2\pi)^2} g^2 \right) p_\nu [\bar{b}, \sigma_{\mu\nu} a]_1 \right\} + \sim g^3 + \dots \quad (47)$$

„Renormierung der Ladung“ heißt aber, man setze $\bar{N} = 0$. Führen wir diese Renormierung aus, so erhält (47) die Form (4); d. h. wir haben gezeigt, daß das Proton bei dieser Kopplung ein Zusatzmoment von:

$$\mu'_P = +g^2 \frac{c_1(\lambda)}{4(2\pi)^2} + \sim g^3 + \dots \quad (48)$$

(in Kernmagnetonen) trägt, was mit der oben angegebenen Beziehung zwischen g und f_4 mit dem Caseschen Resultat identisch ist.

D) Regularisierung

Wir benutzen die in Abschnitt 2 erwähnte Pauli-Villarsche Vorschrift in folgender Form²³⁾: Die in den Erwartungswerten auftretenden Δ -Funktionen (ebenso $\bar{\Delta}, \Delta^{(1)}, \dots$) hängen von Orts-Koordinaten x , und einem Parameter K^2 ab: $\Delta = \Delta(x, K^2)$. Jede Funktion F der Δ -Funktionen: $F = F(\Delta(x, K^2), \dots)$ ist nach dieser Vorschrift zu ersetzen durch die „regularisierte Funktion“ F_R :

$$F_R = \sum_j c_j F_j; \quad F_j = F(\Delta(x, K^2 + M_j^2), \dots). \quad (5)$$

Die c_j, M_j sind zunächst völlig beliebige Zahlen, welche lediglich den Bedingungen:

$$\begin{aligned} c_0 &= 1; \quad M_0 = 0; \quad \sum_j c_j = 0; \quad \sum_j c_j M_j^2 = 0; \\ \sum_j \frac{c_j}{M_j^n} &= 0; \quad n \geq 2; \end{aligned} \quad | \quad (6)$$

(Strich bedeutet: $j \neq 0$) genügen sollen. Es zeigt sich, daß Größen F , welche in unserer gegenwärtigen Theorie endlich aber unbestimmt sind, durch Einführung von F_R unabhängig von der speziellen Wahl der c_j, M_j eindeutig bestimmt werden, während bisher divergente Größen, wie z. B. Selbstenergien, empfindlich von dieser speziellen Wahl abhängen.

Zufolge dem soeben skizzierten Verfahren hat man in (36) Θ_μ zu ersetzen durch:

$$(\Theta_\mu)_R = \sum_j c_j \Theta_{\mu j};$$

²³⁾ Pauli-Villars, l. c., geben noch zwei andere, ähnliche Vorschriften an, welche in den dort behandelten Beispielen das gleiche Resultat liefern.

(46) $\theta_{\mu j}$ entsteht aus (36), indem man dort in $\{\cdot\}$ alle K^2 bzw. K_0^2 ersetzt durch: $K^2 + M_j^2$ bzw. $K_0^2 + M_j^2$. In (37) ist dann beim Übergang von Θ_μ zu $\Theta_{\mu j}$ ϑ' zu ersetzen durch $\vartheta'_j = \vartheta' + (a + b + c) M_j^2$ weiterhin wird: $\vartheta'_j = z \omega_j$; $\omega_j = \omega + 2 M_j^2$.

Sonst läuft die Rechnung genau wie oben dargelegt, man erhält schließlich statt $f(y)$, (44b), die Größe

$$(47a) \quad f_j(y) = \frac{-y^3 + y^2 + y - 1}{2 y K^2 + 2 K_0^2 (y - 1)^2 + 2 M_j^2} + \sim p_\nu^2 + \dots$$

(47) $c_{1j}(\lambda)$ erhält man also aus $c_1(\lambda)$, (45a, b), indem man an gewissen Stellen eine 1 ersetzt durch $(1 + \mu_j) = 1 + \frac{M_j^2}{K_0^2}$. So kommt an Stelle von (45):

$$c_{1j}(\lambda) = \frac{3}{2} - \lambda - \left[\frac{\lambda}{2} (3 - \lambda) + \frac{\mu_j}{2} \right] \ln \left| \frac{\lambda + \mu_j}{1 + \mu_j} \right| - \frac{\lambda (4 - 5\lambda + \lambda^2) - \mu_j (4 - 3\lambda)}{(4\lambda - \lambda^2 + 4\mu_j)^{\frac{1}{2}}} \operatorname{arc tg} \left(\frac{(4\mu_j + 4\lambda - \lambda^2)^{\frac{1}{2}}}{2\mu_j + \lambda} \right).$$

Bei der Berechnung von $\sum_j c_j c_{1j}(\lambda)$ benutze man für $j \neq 0$ die Entwicklungen:

$$(48) \quad \ln |1 + \mu_j| - \ln |\lambda + \mu_j| = (1 - \lambda) \mu_j^{-1} + \sim \mu_j^{-2} + \dots; \\ \operatorname{arc tg} \left(\frac{(4\mu_j + 4\lambda - \lambda^2)^{\frac{1}{2}}}{2\mu_j + \lambda} \right) = (4\mu_j + 4\lambda - \lambda^2)^{\frac{1}{2}} [(2\mu_j + \lambda)^{-1} + \sim \mu_j^{-2} + \dots],$$

und erhält mit (6)

$$(49) \quad c_{1R}(\lambda) = c_1(\lambda).$$

Durch ganz entsprechende Überlegungen, welche ich hier aber nicht im einzelnen wiedergeben will, kann man zeigen, daß die Summe ζ der divergenten Integrale aus (44), (44b) nach der Regularisierung folgende Gestalt annimmt:

$$(50) \quad \zeta_R = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} [a_0 + a_1 \alpha + a_2 \alpha^2 - a_0 - a_1 \alpha - a_2 \alpha^2],$$

wo die a_j und α ganz unabhängig von den c_j , M_j bzw. μ_j sind; d. h. auch unter Regularisierung ist $\zeta_R = 0$.

Damit ist gezeigt, daß unser Ergebnis $c_1(\lambda)$ unter Regularisierung invariant ist. Wir haben also zufällig die durch diese Invarianz ausgezeichnete Integrationsmethode unter den ohne Regularisierung gleichberechtigten Methoden gefunden. Da wir in den folgenden Rechnungen stets die gleiche Integrationsmethode anwenden werden, ist von vornherein klar, daß auch die folgenden Ergebnisse diese Invarianz aufweisen werden. Wir führen deshalb im folgenden die Regularisierung nicht mehr vor, bemerken aber, daß Kontrollrechnungen die erwartete Invarianz explizit bestätigten.

4. Skalares, reelles Mesonfeld, gekoppelt an Proton- und Neutronfeld

Wir müssen jetzt nachträglich noch den Einfluß eines gleichzeitig mit dem Protonfeld an das Mesonfeld gekoppelten Neutronfeldes $\varphi, \bar{\varphi}$ auf μ' untersuchen. Dieses ist nötig, damit wir später unter Umständen durch Addition der reellen und komplexen Theorie zur „symmetrischen“ Theorie kommen können.

Sei also jetzt statt (10): $L = L_0 + L_M + \bar{L}$, wo L_0 durch die Lagrange-Dichte des freien Neutronenfeldes zu ergänzen ist, letztere ebenfalls formal „Ausdungssymmetrisch“ geschrieben, L_M gegen (10) unverändert ist und:

$$\bar{L} = \frac{g}{2} U ([\bar{\varphi}, \varphi] - [\bar{\psi}, \psi])^{24}. \quad (10a)$$

Statt der Gln. (12) haben wir jetzt zu lösen das System:

$$\left. \begin{aligned} (\gamma_\nu \partial_\nu + K_0) \psi &= -\frac{g}{2} \{\psi, U\}; & (\gamma_\nu^T \partial_\nu - K_0) \bar{\psi} &= +\frac{g}{2} \{\bar{\psi}, U\}; \\ (\gamma_\nu \partial_\nu + K_0) \varphi &= +\frac{g}{2} \{\varphi, U\}; & (\gamma_\nu^T \partial_\nu - K_0) \bar{\varphi} &= -\frac{g}{2} \{\bar{\varphi}, U\}; \\ (\square - K^2) U &= -\frac{g}{2} ([\bar{\varphi}, \varphi] - [\bar{\psi}, \psi]). \end{aligned} \right\} \quad (12a)$$

Zu untersuchen ist wieder:

$$j_\mu = \frac{ie}{2} [\bar{\psi}, \gamma_\mu \psi].$$

Man erhält so statt (18):

$$\left. \begin{aligned} \psi^{(1)}(x) &= + \int \bar{S}(x-x') U(x') \psi(x') d^4 x'; \\ U^{(1)}(x) &= + \frac{1}{2} \int \bar{A}(x-x') ([\bar{\varphi}(x'), \varphi(x')] - [\bar{\psi}(x'), \psi(x')]) d^4 x'; \\ \psi^{(2)}(x) &= + \frac{1}{2} \iint \bar{S}(x-x') \{U(x'), \bar{S}(x'-x'') U(x'') \psi(x'')\} d^4 x' d^4 x'' \\ &\quad + \frac{1}{2} \iint \bar{S}(x-x') \{([\bar{\varphi}(x''), \varphi(x'')] - [\bar{\psi}(x''), \psi(x'')]), \psi(x')\} \\ &\quad \cdot \bar{A}(x'-x'') d^4 x' d^4 x''. \end{aligned} \right\} \quad (18a)$$

(19a), (19b) wird in leicht ersichtlicher Weise ergänzt. Jetzt erkennt man, daß in $\langle j_\mu^{(2)} \rangle_{1,0,0}$ lediglich eine Änderung auftritt, daß nämlich in (23b) das Glied $\sim \text{Sp}(S^{(1)}(0))$ von einem (dem einzigen) neu hinzukommenden Glied wegkompenziert wird; das fragliche Glied hatte aber sowieso keinen Einfluß auf μ'_μ ; (48) erfährt also durch diese Variante der Theorie keine Änderung.

Der Erwartungswert $\langle j_\mu^{(2)} \rangle_{1,0,0}$ für ein Neutron ist proportional zu:

$$\text{Sp}(\bar{S}(x'-x) \gamma_\mu S^{(1)}(x-x')) + \text{Sp}(S^{(1)}(x'-x) \gamma_\mu \bar{S}(x-x')).$$

Man zeigt leicht, daß diese Größe null ist, also auch:

$$\mu'_N = 0. \quad (48a)$$

Dank schulde ich Herrn Prof. Dr. F. Hund für die Anregung zu dieser Arbeit sowie wertvolle Diskussionen und Hinweise während ihrer Entstehung, ferner Herrn Dr. H. Lehmann für manchen freundlichen Hinweis.

²⁴⁾ Dies spezielle \bar{L} ermöglicht den einfachen Übergang zur symmetrischen Theorie. Die gleichen Resultate betr. μ'_μ und μ'_N liefert auch das allgemeinere $\bar{L} = \frac{g}{2} U (c [\bar{\varphi}, \varphi] + [\bar{\psi}, \psi])$, wo c irgendeine reelle Zahl ist.

Jena, Theoretisch-Physikalisches Institut der Universität.

(Bei der Redaktion eingegangen am 4. April 1951.)

Zur Frage der magnetischen Momente der Nukleonen. II¹⁾

Von G. Heber

Inhaltsübersicht

Nach einer in einer vorausgegangenen Arbeit²⁾ des Verfassers dargelegten Methode werden die magnetischen Zusatzmomente der Nukleonen infolge einer skalaren bzw. pseudoskalaren Kopplung an ein komplexes, skalares bzw. reelles und komplexes pseudoskalares Mesonfeld berechnet. Die Rechnung ist lorentz-invariant, ladungssymmetrisch und invariant unter der in I genauer besprochenen Regularisierung. Die Resultate stimmen völlig mit den Caseschen³⁾ überein.

1. Einführung

In I wurde am Beispiel der Kopplung der Nukleonen an ein skalares, reelles Mesonfeld eine Methode entwickelt, aus dem Erwartungswert des Operators der elektrischen Stromdichte in relativistisch invariante Weise die infolge dieser Kopplung auftretenden magnetischen Spin-Momente der Nukleonen zu entnehmen. Die ausführliche Charakterisierung dieser Methode wurde in der Einführung zu I gegeben. Wir wenden diese Methode jetzt auf die Kopplung eines skalaren komplexen, sowie pseudoskalaren reellen und komplexen Mesonfeldes an das Nukleonenfeld an. Die Ergebnisse von I und II werden im Schlußabschnitt diskutiert. Die in I und II benutzte Beziehung zwischen der mesischen Ladung g eines Teilchens und derjenigen g' des zugehörigen Antiteilchens wird im Anhang unter geringeren Voraussetzungen als bei Case²⁾ hergeleitet. Wegen der Bezeichnungen vgl. I.

2. Skalares, komplexes Mesonfeld**A) Aufstellung und Lösung der Feldgleichungen**

Unser Ausgangspunkt sei hier:

$$\begin{aligned}
 L &= L_0 + L_M + \bar{L}; \\
 L_0 &= -\frac{1}{2} \partial_\mu A_\mu \cdot \partial_\nu A_\nu - \frac{1}{2} \bar{\psi} (\gamma_\nu D_\nu + K_0) \psi - \frac{1}{2} \bar{\psi}' (\gamma_\nu D_\nu^* + K_0) \psi' \\
 &\quad - \frac{1}{2} \bar{\psi} (\gamma_\nu \partial_\nu + K_0) \varphi - \frac{1}{2} \bar{\psi}' (\gamma_\nu \partial_\nu + K_0) \varphi'; \\
 L_M &= -\frac{1}{2} \{D_\mu^* U^*, D_\mu U\} + K^2 \{U^*, U\}; \\
 \bar{L} &= \frac{g}{4} (\bar{\psi} \psi U^* + \bar{\psi} \varphi U + \bar{\psi}' \psi' U^{*\prime} + \bar{\psi}' \varphi' U') \\
 &= \frac{g}{4} ([\bar{\psi}, \psi] U^* + [\bar{\psi}, \varphi] U).
 \end{aligned} \tag{1}$$

¹⁾ Dissertation Jena, Teil II.²⁾ G. Heber, Ann. Physik, 9, 151 (1951), künftig zitiert als I.³⁾ K. M. Case, Physic. Rev. 76, 1 (1949).

Dies L ist offensichtlich lorentz- und eichinvariant, sowie ladungssymmetrisch gebaut. Um zur symmetrischen Theorie zu kommen, addiere man die Mesonteile von (I, 10a) und (1) mit $g = 2\sqrt{2}g_1$. Die Feldgleichungen symmetrisieren wir wieder in geeigneter Weise und setzen in den Proton- und Meson-Gleichungen $e = 0$, so daß wir folgendes System lösen werden:

$$\begin{aligned} (\gamma_\nu \partial_\nu + K_0) \psi &= \frac{g}{4} \{\varphi, U\}; \quad (\gamma_\nu^T \partial_\nu - K_0) \bar{\psi} = -\frac{g}{4} \{\bar{\varphi}, U^*\}; \\ (\gamma_\nu \partial_\nu + K_0) \varphi &= \frac{g}{4} \{\psi, U^*\}; \quad (\gamma_\nu^T \partial_\nu - K_0) \bar{\varphi} = -\frac{g}{4} \{\bar{\psi}, U\}; \\ (\square - K^2) U &= -\frac{g}{4} [\bar{\psi}, \psi]; \quad (\square - K^2) U^* = -\frac{g}{4} [\bar{\varphi}, \varphi]. \end{aligned} \quad (2)$$

Der elektrische Stromdichte-Operator ist hier:

$$\begin{aligned} j_\mu &= j_{\mu p} + j_{\mu M}; \quad j_{\mu p} = \frac{ie}{2} [\bar{\psi}, \gamma_\mu \psi]; \\ j_{\mu M} &= \frac{ie}{2} (\{U, \partial_\mu U^*\} - \{\partial_\mu U, U^*\}). \end{aligned} \quad (3)$$

Genau wie in I setzen wir für alle Feldfunktionen Potenzreihen nach g ein und führen die höheren Gleider mittels derselben Greenschen Funktionen wie in I auf die ersten Glieder der Reihe zurück. Man erhält z. B.:

$$\begin{aligned} \psi^{(1)}(x) &= -\frac{1}{2} \int \bar{S}(x-x') U(x') \varphi(x') d^4 x'; \\ \varphi^{(1)}(x) &= -\frac{1}{2} \int \bar{S}(x-x') U^*(x') \psi(x') d^4 x'; \\ U^{(1)}(x) &= +\frac{1}{2} \int \bar{A}(x-x') \bar{\varphi}(x') \psi(x') d^4 x'; \\ U^{(2)}(x) &= -\frac{1}{8} \iint \bar{A}(x-x') [U(x'') \bar{\psi}(x'') \bar{S}(x''-x'), \psi(x')] d^4 x' d^4 x''; \\ &\quad -\frac{1}{8} \iint \bar{A}(x-x') [\bar{\varphi}(x'), \bar{S}(x'-x'') U(x'') \varphi(x'')] d^4 x' d^4 x''. \end{aligned} \quad (4)$$

B) Berechnung der Erwartungswerte

Auf dem gleichen Wege wie in I angedeutet, erhält man auch hier die invarianten Vertauschungsregeln und Vakuum-Erwartungswerte:

$$\begin{aligned} [U^*(x), U(x')] &= [U(x), U^*(x')] = i A(x-x'); \\ \{\bar{\psi}_\alpha(x), \psi_\beta(x')\} &= \{\bar{\psi}_\alpha(x), \varphi_\beta(x')\} = -i S_{\alpha\beta}(x'-x); \\ [U, U^*] &= [U, \psi] = [U, \bar{\varphi}] = \dots = [\bar{\psi}, \bar{\varphi}] = \{\varphi, \varphi\} = \{\bar{\varphi}, \bar{\varphi}\} = \dots = 0; \\ \langle \{U(x'), U^*(x)\} \rangle_0 &= A^{(1)}(x-x'); \\ \langle U^*(x) U(x') \rangle_0 &= i A^{(+)}(x-x'); \quad \langle U(x') U^*(x) \rangle_0 = -i A^{(-)}(x-x'); \\ \langle \bar{\psi}_\alpha(x), \psi_\beta(x') \rangle_0 &= S_{\beta\alpha}^{(1)}(x'-x); \\ \langle \bar{\psi}_\alpha(x) \psi_\beta(x') \rangle_0 &= -i S_{\beta\alpha}^{(-)}(x'-x); \quad \langle \psi_\beta(x') \bar{\psi}_\alpha(x) \rangle_0 = -i S_{\beta\alpha}^{(+)}(x'-x). \end{aligned} \quad (5)$$

(Der Index (0) an φ , ψ , U , ... ist ab (4) weggelassen.)

Mit $\langle j_\mu^{(0)} \rangle$ und $\langle j_\mu^{(1)} \rangle$ brauchen wir uns nicht erst zu befassen; die Resultate sind evident.

⁴⁾ In der Caseschen Bezeichnung ist $g = 4/; g_1$ ist g aus I.

netrisch
sonstige
ren wir
hungen

Wir wenden uns der Berechnung von $\langle j_{\mu_P}^{(2)} \rangle_{1,0,0}$ zu (Erwartungswert für 1 Proton, 0 Mesonen, 0 Neutronen). Man erhält mit (3,4) und (5):

$$\begin{aligned} [\bar{\psi}^{(1)}(x), \gamma_\mu \psi^{(1)}(x)]_{1,0,0} &= \text{Vak.-Terme} \rightarrow 0; \\ [\bar{\psi}^{(0)}(x), \gamma_\mu \psi^{(2)}(x)]_{1,0,0} &= + \frac{1}{8} \iint [\bar{\psi}(x), \gamma_\mu \bar{S}(x-x') \{ \bar{S}(x'-x'') \bar{A}^{(1)}(x''-x') \\ &\quad + S^{(1)}(x'-x'') \bar{A}(x'-x'') \} \psi(x'')]_1 d^4 x' d^4 x''; \end{aligned}$$

$[\bar{\psi}^{(2)}, \gamma_\mu \psi^{(0)}]$ entsprechend. Insgesamt kommt so:

$$\begin{aligned} \langle j_{\mu_P}^{(2)} \rangle_{1,0,0} &= \frac{i e}{16} (A_\mu(x) + B_\mu(x)); \\ A_\mu(x) &= + \iint [\bar{\psi}(x), \gamma_\mu \bar{S}(x-x') \bar{S}(x'-x'') \psi(x'')]_1 \bar{A}^{(1)}(x''-x') \\ &\quad \cdot d^4 x' d^4 x'' + \text{konj.}; \\ B_\mu(x) &= + \iint [\bar{\psi}(x), \gamma_\mu \bar{S}(x-x') S^{(1)}(x'-x'') \psi(x'')]_1 \bar{A}(x''-x') \\ &\quad \cdot d^4 x' d^4 x'' + \text{konj.} \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (6)$$

Wir können nachweisen, daß A_μ und B_μ nur Glieder vom Typ $[\bar{\psi}, \gamma_\mu \psi]_1$ enthalten. Es genügt dazu, eines der Integrale aus (6) zu untersuchen, z. B. dieses:

$$A_\mu^{(1)}(x) = \iint [\bar{\psi}(x) \gamma_\mu \bar{S}(x-x') \bar{S}(x'-x'') \psi(x'')]_1 \bar{A}^{(1)}(x''-x') d^4 x' d^4 x''. \quad (7)$$

Setzen wir wie früher:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= a e^{i P_\nu x_\nu}; \quad (i \gamma_\nu P_\nu + K_0) a = 0; \quad P_\nu^2 = -K_0^2, \\ \bar{A}^{(1)}(x) &= (2 \pi)^{-4} \int e^{i k_\nu x_\nu} \bar{A}^{(1)}(k) d^4 k, \end{aligned}$$

so folgt:

$$\begin{aligned} A_\mu^{(1)}(x) &= (2 \pi)^{-3} \int \frac{\delta(k_\nu^2 + K^2)}{(P_\nu^2 + K_0^2)((P_\nu + k_\nu)^2 + K_0^2)} M_\mu(x) d^4 k; \\ M_\mu(x) &= \bar{\psi}(x) \gamma_\mu (i \gamma_\nu P_\nu - K_0) (i \gamma_\lambda (k_\lambda + P_\lambda) - K_0) \psi(x) \\ &= -\bar{\psi} \gamma_\mu i \gamma_\lambda (i \gamma_\nu P_\nu + K_0) \psi + \sim \bar{\psi} \gamma_\mu \psi; \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (7a)$$

womit der angekündigte Nachweis bereits geführt ist. $j_{\mu_P}^{(2)}$ trägt also nichts zum magnetischen Zusatzmoment des Protons bei.

Wir gehen über zur Berechnung von $\langle j_{\mu_P}^{(2)} \rangle_{0,1,0}$, dem Erwartungswert für ein Neutron. Man findet (Vakuum-Terme werden überall weggelassen):

$$\begin{aligned} [\bar{\psi}^{(1)}(x), \gamma_\mu \psi^{(1)}(x)]_{0,1,0} &= + \frac{1}{8} \iint [\bar{\psi}(x'), \bar{S}(x'-x) \gamma_\mu \bar{S}(x-x'') \psi(x'')]_1 \bar{A}^{(1)}(x''-x') d^4 x' d^4 x''; \\ [\bar{\psi}^{(0)}(x), \gamma_\mu \psi^{(2)}(x)]_{0,1,0} &= + \frac{1}{8} \iint [\bar{\psi}(x'), S^{(1)}(x'-x) \gamma_\mu \bar{S}(x-x'') \psi(x'')]_1 \bar{A}(x''-x') d^4 x' d^4 x''; \end{aligned}$$

$[\bar{\psi}^{(2)}, \gamma_\mu \psi^{(0)}]_{0,1,0}$ entsprechend. Insgesamt erhält man:

$$\begin{aligned} \langle j_{\mu_P}^{(2)} \rangle_{0,1,0} &= \frac{i e}{16} \iint [\bar{\psi}(x'), K_\mu \varphi(x'')]_1 d^4 x' d^4 x''; \\ K_\mu &= + \bar{S}(x'-x) \gamma_\mu \bar{S}(x-x'') \bar{A}^{(1)}(x'-x'') \\ &\quad + S^{(1)}(x'-x) \gamma_\mu \bar{S}(x-x'') \bar{A}(x'-x'') \\ &\quad + \bar{S}(x'-x) \gamma_\mu S^{(1)}(x-x'') \bar{A}(x'-x''). \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (8)$$

Die Größe (8) kommt aber (bis auf den Faktor) schon in (I, 23) vor, aus (I, 46) übernehmen wir sofort:

$$\langle j_{\mu P}^{(2)} \rangle_{0,1,0} = - \frac{c_1(\lambda)}{16 \cdot (2\pi)^2} \mu_0 \bar{P}_\mu [\bar{\varphi}, \varphi]_1 + N [\bar{\varphi}, \gamma_\mu \varphi]_1. \quad (9)$$

Wir kommen nun zur Analyse von $j_{\mu M}^{(2)}$. Zunächst soll der Erwartungswert für ein Neutron untersucht werden. Man erhält:

$$\begin{aligned} & \langle \{\partial_\mu U^{*(1)}, U^{(1)}\} - \{U^{*(1)}, \partial_\mu U^{(1)}\} \rangle_{0,1,0} \\ &= -\frac{1}{8} \iint [\bar{\varphi}(x''), S^{(1)}(x'' - x') \varphi(x')]_1 (\bar{A}_{x_\mu}(x - x') \bar{A}(x - x'') \\ & \quad - \bar{A}_{x_\mu}(x - x'') \bar{A}(x - x')) d^4 x' d^4 x''^5; \\ & \langle \partial_\mu U^{*(2)} \cdot U^{(0)} - U^{*(2)} \partial_\mu U^{(0)} \rangle_{0,1,0} \\ &= \frac{i}{8} \iint [\bar{\varphi}(x'') \bar{S}(x'' - x'), \varphi(x')]_1 (\bar{A}(x - x') \Delta_{x_\mu}^{(+)}(x'' - x) \\ & \quad - \bar{A}_{x_\mu}(x - x') \Delta^{(+)}(x'' - x)) d^4 x' d^4 x''. \end{aligned}$$

Es folgen 3 ähnlich gebaute Terme, zusammenfassend erhält man:

$$\begin{aligned} \langle j_{\mu M}^{(2)}(x) \rangle_{0,1,0} &= \frac{i}{16} \iint [\bar{\varphi}(x''), \Gamma_\mu \varphi(x')]_1 d^4 x' d^4 x''; \\ \Gamma_\mu &= S^{(1)}(x'' - x') \Delta_\mu^{(1)}(x - x', x - x'') \\ & \quad + \bar{S}(x'' - x') \bar{A}_\mu(x - x', x - x''); \\ \Delta_\mu^{(1)}(\xi, \eta) &= \bar{A}(\xi) \bar{A}_{\eta_\mu}(\eta) + \bar{A}_{\xi_\mu}(\xi) \bar{A}(\eta); \\ \bar{A}_\mu(\xi, \eta) &= \bar{A}(\xi) \Delta_{\eta_\mu}^{(1)}(\eta) - \bar{A}_{\xi_\mu}(\xi) \Delta^{(1)}(\eta) + \Delta^{(1)}(\xi) \bar{A}_{\eta_\mu}(\eta) - \Delta_{\xi_\mu}^{(1)}(\xi) \bar{A}(\eta). \end{aligned} \quad (10)$$

Eine ganz parallel laufende Rechnung liefert schließlich das Ergebnis:

$$\langle j_{\mu M}^{(2)}(x) \rangle_{1,0,0} = -\frac{i}{16} \iint [\bar{\varphi}(x''), \Gamma_\mu \varphi(x')]_1 d^4 x' d^4 x'', \quad (11)$$

mit dem Γ_μ aus (10).

C) Auswertung der Integrale

Wir haben zu berechnen das Integral:

$$\Gamma_\mu = \iint \bar{\varphi}(x'') \Gamma_\mu \varphi(x') d^4 x' d^4 x'' \quad (12)$$

aus (10); beginnen wir wieder mit:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= a e^{i P_\nu x_\nu}; & \bar{\varphi}(x) &= \bar{b} e^{-i P'_\nu x_\nu}; \\ P_\nu^2 &= P'^2_\nu = -K_0^2; & (i \gamma_\nu P_\nu + K_0) a &= 0 = \bar{b} (i \gamma_\nu P'_\nu + K_0); \\ \bar{S}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{i k_\nu x_\nu} \bar{S}(k) d^4 k; & S^{(1)}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{i k_\nu x_\nu} S^{(1)}(k) d^4 k. \end{aligned} \quad (13)$$

⁵⁾ Wir schreiben: $\bar{A}_{x_\mu}(x - x') \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} \bar{A}(x - x')$, und entsprechend.

Die Integration über x' und x'' lässt sich dann in (12) ausführen und liefert:

$$(I, 46) \quad J_\mu(x) = (2\pi)^{-3} \int F_\mu(k, P, P') \cdot M(x) d^4 k;$$

$$M(x) = \bar{\varphi}(x) (i \gamma_\nu k_\nu - K_0) \varphi(x);$$

$$(9) \quad F_\mu(k, P, P') = i (2 k_\mu - \bar{P}_\mu) \left\{ \frac{\delta(k_\nu^2 + K_0^2)}{((P_\nu - k_\nu)^2 + K^2) ((P'_\nu - k_\nu)^2 + K^2)} \right. \quad \left. \right\}$$

$$+ \frac{\delta((P'_\nu - k_\nu)^2 + K^2)}{(k_\nu^2 + K_0^2) ((P_\nu - k_\nu)^2 + K^2)} + \frac{\delta((P_\nu - k_\nu)^2 + K^2)}{(k_\nu^2 + K_0^2) ((P'_\nu - k_\nu)^2 + K^2)} \quad (14)$$

$$= (8\pi)^{-1} (\bar{P}_\mu - 2 k_\mu) i \iiint e^{i\vartheta} \{ \varepsilon(a) \varepsilon(b) + \varepsilon(a) \varepsilon(c) \\ + \varepsilon(b) \varepsilon(c) \} da db dc,$$

mit:

$$\vartheta = c(k_\nu^2 + K_0^2) + b((P_\nu - k_\nu)^2 + K^2) + a((P'_\nu - k_\nu)^2 + K^2);$$

$$\bar{P}_\nu = P'_\nu + P_\nu, \text{ vgl. (I, 29a, b).}$$

Nach der Transformation:

$$k_\nu = k'_\nu + \frac{a P'_\nu + b P_\nu}{a + b + c}$$

lässt sich in J_μ die Integration über k' ausführen und liefert [vgl. (I, 30)]:

$$J_\mu(\xi) = \frac{\pi^2}{4(2\pi)^4} \iiint e^{i\vartheta'} \cdot \frac{\varepsilon(a+b+c)}{(a+b+c)^2} \{ \varepsilon(a) \varepsilon(b) + \varepsilon(a) \varepsilon(c) + \varepsilon(b) \varepsilon(c) \} \\ \cdot M'_\mu(\xi) da db dc; \quad (15)$$

$$\vartheta' = -(a P'_\nu + b P_\nu)^2 (a+b+c)^{-1} + (a+b)(K^2 - K_0^2) + c K_0^2;$$

$$M'_\mu(\xi) = \left(\bar{P}_\mu - 2 \frac{a P'_\mu + b P_\mu}{a+b+c} \right) K_0 \left(1 + \frac{a+b}{a+b+c} \right) \bar{\varphi}(\xi) \varphi(\xi) + \sim \bar{\varphi} \gamma_\mu \varphi.$$

Schließlich substituieren wir [vgl. (I, 38)]:

$$a = z(1-y-x); b = z(1-y+x); c = 2zy;$$

mit (I, 39a, b, 40a, b) erhält man die zu (I, 41) parallele Formel

$$(I, 41) \quad J_\mu = \frac{\pi^2 K_0^2}{4(2\pi)^4} \bar{\varphi} \varphi (2 I_\mu + II_\mu), \quad (16)$$

wo die I_μ , II_μ von den in (I, 41) aufgeschriebenen Integralen nur in ω und $f_\mu(x, y)$ verschieden sind, und zwar haben wir in (16) zu benutzen:

$$(I, 41) \quad \omega = -\frac{1}{2} \bar{P}_\nu^2 (y-1)^2 - \frac{1}{2} p_\nu^2 x^2 + 2(1-y)(K^2 - K_0^2) + 2y K_0^2 \quad (16a)$$

$$f_\mu(x, y) = (\bar{P}_\mu y + p_\mu x)(2-y):$$

Die Integration über z und x lässt sich wieder mit (I, 42, 43) ausführen; man hat jetzt in (I, 43) nur obiges α zu ersetzen durch

$$\alpha = 2y K_0^2 - \frac{1}{2} \bar{P}_\nu^2 (y-1)^2 + 2(1-y)(K^2 - K_0^2).$$

Nach Weglassen der Summe der divergenten Integrale erhält man diesmal:

$$(I, 42) \quad (2 I_\mu + II_\mu) = \frac{8i \bar{P}_\mu}{K_0^2} \int_0^1 \frac{(2y - 3y^2 + y^3)}{(y^2 - \lambda y + \lambda^2)} dy = -\frac{8i \bar{P}_\mu}{K_0^2} c_2(\lambda), \quad (17)$$

$$c_2(\lambda) = \frac{5}{2} - \lambda - \frac{2-4\lambda+\lambda^2}{2} \ln \frac{1}{\lambda} - \frac{\lambda(8-6\lambda+\lambda^2)}{(4\lambda-\lambda^2)^{\frac{1}{2}}} \text{arc tg} \left(\frac{4}{\lambda} - 1 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Also haben wir errechnet:

$$\left. \begin{aligned} \langle j_{\mu M}^{(2)} \rangle_{0,1,0} &= \frac{c_2(\lambda)}{16(2\pi)^2} \mu_0 \bar{P}_\mu [\bar{\psi}, \varphi]_1 + \sim [\bar{\psi}, \gamma_\mu \varphi]_1; \\ \langle j_{\mu M}^{(2)} \rangle_{1,0,0} &= -\frac{c_2(\lambda)}{16(2\pi)^2} \mu_0 \bar{P}_\mu [\bar{\psi}, \psi]_1 + \sim [\bar{\psi}, \gamma_\mu \psi]_1. \end{aligned} \right\} \quad (18a)$$

Von oben übernehmen wir (vgl. (9)):

$$\left. \begin{aligned} \langle j_{\mu P}^{(2)} \rangle_{0,1,0} &= -\frac{c_1(\lambda)}{16(2\pi)^2} \mu_0 \bar{P}_\mu [\bar{\psi}, \varphi]_1 + \sim [\bar{\psi}, \gamma_\mu \varphi]_1; \\ \langle j_{\mu P}^{(2)} \rangle_{1,0,0} &\sim [\bar{\psi}, \gamma_\mu \psi]_1. \end{aligned} \right\} \quad (18b)$$

Das gibt, unter Beachtung von (I, 47a, 47, 48) magnetische Zusatzmomente folgender Größe:

$$\left. \begin{aligned} \mu'_P &= +\frac{g^2}{16(2\pi)^2} c_2(\lambda) \\ \mu'_N &= +\frac{g^2}{16(2\pi)^2} (c_1(\lambda) - c_2(\lambda)), \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

gemessen in Kernmagnetonen. Mit $g = 4f$ hat man in (19) genau das Casesche⁸⁾ Resultat.

3. Pseudoskalares, reelles Mesonfeld

Wir werden in diesem Abschnitt weitgehend die in I, Abschnitt 3, beim skalaren, reellen Mesonfeld angestellten Überlegungen übernehmen können. Wir schreiben solche parallel laufende Rechnungen nicht nochmals auf, sondern weisen nur auf die Änderungen gegenüber I hin.

A) Aufspaltung und Lösung der Feldgleichungen

L unterscheidet sich von (I, 10) nur in \bar{L} , und zwar ist jetzt:

$$\bar{L} = \frac{i}{2} g U [\bar{\psi}, \gamma_5 \psi]; \quad \gamma_5 = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4. \quad (20)$$

Die zu lösenden Feldgleichungen lauten also nach der entsprechenden Symmetrisierung und Spezialisierung (betr. $e \rightarrow 0$):

$$\left. \begin{aligned} (\gamma_\nu \partial_\nu + K_0) \bar{\psi} &= \frac{i}{2} g \{ \gamma_5 \psi, U \}; \quad (\gamma_\nu^T \partial_\nu - K_0) \bar{\psi} = -\frac{i}{2} g \{ \bar{\psi}, \gamma_5, U \}; \\ (\square - K^2) U &= -\frac{i}{2} g [\bar{\psi}, \gamma_5 \psi]. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Der Stromdichte-Operator ist natürlich wieder:

$$j_\mu = \frac{i}{2} e [\bar{\psi}, \gamma_\mu \psi]. \quad (21a)$$

Zur Lösung von (21) entwickeln wir diesmal nach Potenzen von (ig) ; dann tritt die Analogie zu I deutlicher hervor. Man erhält so mit den gleichen Greenschen Funktionen wie in I an Stelle von (I, 18):

$$\left. \begin{aligned} \psi^{(1)}(x) &= -\int \bar{S}(x - x') \gamma_5 \psi(x') U(x') d^4 x'; \\ \bar{\psi}^{(1)}(x) &= -\int \bar{\psi}(x') \gamma_5 \bar{S}(x' - x) U(x') d^4 x'; \\ U^{(1)}(x) &= +\frac{1}{2} \int \bar{A}(x - x') [\bar{\psi}(x'), \gamma_5 \psi(x')] d^4 x'; \text{ usw.} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

B) Berechnung der Erwartungswerte

Die Beziehungen (I, 19, 20) können unverändert übernommen werden; ebenso (I, 21a, 21, 22a, 22). Die Formeln (I, 23a, b) können leicht umgeschrieben werden; es tritt nur an verschiedenen Stellen, wo früher eine 1 stand, die Größe γ_5 auf. (I, 23) kann man übernehmen, wenn man für Φ und K_μ folgende Größen einführt:

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \frac{1}{2} \int \gamma_5 (\bar{S}(x' - x'') \Delta^{(1)}(x' - x'') + S^{(1)}(x' - x'') \bar{\Delta}(x' - x'')) \gamma_5 \psi(x'') d^4 x'' \\ &\quad - \frac{1}{2} \gamma_5 \operatorname{Sp}(\gamma_5 S^{(1)}(0)) \int \bar{\Delta}(x' - x'') d^4 x'' \cdot \psi(x'); \\ K_\mu &= \gamma_5 [\bar{S}(x' - x) \gamma_\mu \bar{S}(x - x'') \Delta^{(1)}(x'' - x') \\ &\quad + S^{(1)}(x' - x) \gamma_\mu \bar{S}(x - x'') \bar{\Delta}(x'' - x') \\ &\quad + \bar{S}(x' - x) \gamma_\mu S^{(1)}(x - x'') \bar{\Delta}(x'' - x')] \gamma_5; \\ \bar{\Phi}(x') & \text{entsprechend.} \end{aligned} \quad \left. \right\} (23)$$

C) Auswertung der Integrale

Beachtet man die Beziehungen:

$$\{\gamma_5, \gamma_\mu\} = 0; \quad \gamma_5^2 = 1, \quad (24)$$

so kann man den Beweis, daß die von den Gliedern mit $\Phi, \bar{\Phi}$ herrührenden Teile von $\langle j_\mu^{(2)} \rangle_{1,0}$ die Form $[\bar{\psi}, \gamma_\nu \psi]$ haben, fast wörtlich von I übernehmen; man hat nur in $G(p)$, (I, 28), den Faktor $(i \gamma_\nu q_\nu - K_0)$ des Integranden abzuändern in:

$$\gamma_5 (i \gamma_\nu q_\nu - K_0) \gamma_5 = - (i \gamma_\nu q_\nu + K_0),$$

d. h. man erhält in (I, 31) statt $(i \gamma_\nu p_\nu \frac{b}{a+b} - K_0)$ die Größe: $-(i \gamma_\nu p_\nu \frac{b}{a+b} + K_0)$, was aber das Resultat, wie oben angedeutet, nicht ändert.

Auch die Berechnung von

$$\Theta_\mu = \iint \bar{\psi}(x') K_\mu \psi(x'') d^4 x' d^4 x'', \quad (25)$$

mit K_μ aus (23) verläuft weitgehend parallel der entsprechenden Berechnung in I. In (I, 36) hat man statt des dortigen $M_\mu(x)$ einzuführen (beachte auch (I, 34)):

$$\begin{aligned} M_\mu(x) &= \bar{\psi}(x) \gamma_5 (i \gamma_\nu (P'_\nu + k_\nu) - K_0) \gamma_\mu (i \gamma_\lambda (P_\lambda + k_\lambda) - K_0) \gamma_5 \psi(x) \\ &= -\bar{\psi}(x) i \gamma_\nu k_\nu i \gamma_\mu i \gamma_\lambda k_\lambda \psi(x). \end{aligned} \quad \left. \right\} (26)$$

Mit (I, 29a, b, 37a, 30) kann wieder über k' integriert werden; man erhält Θ_μ in der Form (I, 37), wo nur $M'_\mu(\xi)$ zu ersetzen ist durch:

$$\begin{aligned} (\alpha_\nu &= - (a P'_\nu + b P_\nu) (a + b + c)^{-1}) \\ M'_\mu(\xi) &= -\bar{\psi}(\xi) i \gamma_\nu \alpha_\nu \gamma_\mu i \gamma_\lambda \alpha_\lambda \psi(\xi) + \sim \bar{\psi} \gamma_\mu \psi \\ &= 2i K_0 (a + b + c)^{-2} (a^2 P'_\mu + b^2 P_\mu + a b P_\mu) \bar{\psi}(\xi) \psi(\xi) + \sim \bar{\psi} \gamma_\mu \psi. \end{aligned} \quad \left. \right\} (26a)$$

Nach Einführung der x, y, z gemäß (I, 38) erhält man:

$$M'_\mu(\xi) = i K_0 [(1-y)^2 \bar{P}_\mu + x(y-1) p_\mu] \bar{\psi}(\xi) \psi(\xi) + \sim \bar{\psi} \gamma_\mu \psi. \quad (26b)$$

Auch (I, 41) können wir übernehmen, wenn wir nur das dortige $f_\mu(x, y)$ ersetzen durch:

$$f_\mu(x, y) = [(1-y) \bar{P}_\mu + x(y-1) p_\mu]. \quad (27)$$

In genau der gleichen Weise wie in I erhält man schließlich:

$$(2 I_\mu + II_\mu) = -\frac{8i \bar{P}_\mu}{K_0^2} \int_0^1 \frac{1-3y+3y^2-y^3}{y^2-2y+\lambda y+1} dy = -8i \bar{P}_\mu K_0^{-2} c_3(\lambda);$$

$$c_3(\lambda) = \frac{1}{2} + \lambda - \frac{\lambda(1-\lambda)}{2} \ln \frac{1}{\lambda} - \frac{\lambda^2(3-\lambda)}{(4\lambda-\lambda^2)^{\frac{1}{2}}} \operatorname{arc tg} \left(\frac{4}{\lambda} - 1 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (28)$$

Wir können somit notieren:

$$\langle j_\mu^{(2)} \rangle_{1,0} = -\frac{c_3(\lambda)}{4(2\pi)^2} \mu_0 \bar{P}_\mu [\bar{\psi}, \psi]_1 + \sim [\bar{\psi}, \gamma_\mu \psi]_1. \quad (29)$$

Das entspricht einem magnetischen Zusatzmoment von:

$$\mu'_P = -\frac{g^2}{4} \cdot \frac{c_3(\lambda)}{(2\pi)^2}, \quad (30)$$

(wobei beachtet ist, daß wir nach (ig) entwickelt hatten). Der in I, Abschnitt 4 angedeutete Beweis, daß durch zusätzliches Ankoppeln eines Neutronfeldes (30) unverändert bleibt und $\mu'_N = 0$ wird, kann ohne Schwierigkeiten auf unser jetziges Modell übertragen werden.

4. Pseudoskalares, komplexes Mesonfeld

A) Aufstellung und Lösung der Feldgleichungen

Wir können wieder einen großen Teil der Rechnungen aus dem 2. Abschnitt dieser Arbeit übernehmen. Hier unterscheidet sich L von (1) nur in \bar{L} , und zwar ist:

$$\bar{L} = \frac{i}{4} (U^* [\bar{\psi}, \gamma_5 \psi] + U [\bar{\psi}, \gamma_5 \varphi]); \quad (31)$$

wir lösen dementsprechend die Feldgleichungen:

$$\left. \begin{aligned} (\gamma_\nu \partial_\nu + K_0) \psi &= \frac{i}{4} \langle \gamma_5 \varphi, U \rangle; & (\gamma_\nu^T \partial_\nu - K_0) \bar{\psi} &= -\frac{i}{4} \langle \bar{\psi} \gamma_5, U^* \rangle; \\ (\gamma_\nu \partial_\nu + K_0) \varphi &= \frac{i}{4} \langle \gamma_5 \psi, U^* \rangle; & (\gamma_\nu^T \partial_\nu - K_0) \bar{\varphi} &= -\frac{i}{4} \langle \bar{\psi} \gamma_5, U \rangle; \\ (\square - K^2) U &= -\frac{i}{4} [\bar{\psi}, \gamma_5 \psi]; & (\square - K^2) U^* &= -\frac{i}{4} [\bar{\psi}, \gamma_5 \varphi]. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Der elektrische Stromdichte-Operator ist wieder durch (3) gegeben. In den Operatoren (4) taucht an verschiedenen Stellen ein γ_5 auf; wir sparen uns das Aufschreiben.

B) Berechnung der Erwartungswerte

(5) kann wieder völlig übernommen werden. Untersuchen wir wie oben zunächst $\langle j_\mu^{(2)} P \rangle_{1,0,0}$, so lautet das typische Integral $A_\mu^{(1)}(x)$, (7), aus (6) jetzt:

$A_\mu^{(1)}(x) = \iint \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \bar{S}(x-x') \gamma_5 \bar{S}(x'-x'') \gamma_5 \psi(x'') \Delta^{(1)}(x''-x') d^4 x' d^4 x''$. (33)
Mit diesem Ausdruck läßt sich der Nachweis, daß $\langle j_\mu^{(2)} P \rangle_{1,0,0} \sim [\bar{\psi}, \gamma_\mu \psi]_1$ aber ganz ähnlich wie oben führen.

Man sieht schon beinahe ohne Rechnung, daß:

$$\langle j_{\mu P}^{(2)} \rangle_{0,1,0} = \frac{i}{16} \iint [\bar{\psi}(x'), K_\mu \varphi(x'')]_1 d^4 x' d^4 x'', \quad (34)$$

mit K_μ aus (23); so daß also:

$$\langle j_{\mu F}^{(2)} \rangle_{0,1,0} = -\frac{c_3(\lambda)}{16(2\pi)^2} \mu_0 \bar{P}_\mu [\bar{\varphi}, \varphi]_1 + \sim [\bar{\varphi}, \gamma_\mu \varphi]_1, \quad (35)$$

$c_3(\lambda)$ aus (28).

In der uns nun geläufigen Weise findet man weiter:

$$\langle j_{\mu M}^{(2)} \rangle_{0,1,0} = \frac{i e}{16} \iint [\bar{\varphi}(x''), I'_\mu \varphi(x')]_1 d^4 x' d^4 x''; \quad (36)$$

(29)

wo: $I'_\mu = \gamma_5 I_\mu \gamma_5$, I_μ aus (10).

Schließlich ist:

$$\langle j_{\mu M}^{(2)} \rangle_{1,0,0} = -\frac{i e}{16} \iint [\bar{\psi}(x''), I'_\mu \psi(x')]_1 d^4 x' d^4 x''. \quad (37)$$

(30)

C) Auswertung der Integrale

Wir haben noch zu berechnen (vgl. (36)):

$$J'_\mu = \iint \bar{\varphi}(x'') I'_\mu \varphi(x') d^4 x' d^4 x''. \quad (38)$$

Mit (13) erhält man $J'_\mu = (2\pi)^{-3} \int F_\mu(k, P, P') \cdot \bar{M}(x) d^4 k$,

hier ist F_μ das gleiche wie in (14), während:

$$\bar{M}(x) = \bar{\varphi}(x) \gamma_5 (i \gamma_\nu k_\nu - K_0) \gamma_5 \varphi(x) = -\bar{\varphi}(x) (i \gamma_\nu k_\nu + K_0) \varphi(x);$$

(15) kann man übernehmen, nachdem man das dortige $M'_\mu(\xi)$ ersetzt hat durch:

$$\bar{M}'_\mu(\xi) = \left(\bar{P}_\mu - 2 \frac{a P'_\mu + b P_\mu}{a + b + c} \right) K_0 \left(1 - \frac{a + b}{a + b + c} \right) \bar{\varphi}(\xi) \varphi(\xi).$$

Nach weiteren genau parallel laufenden Rechnungen erhält man schließlich:

$$J'_\mu(\xi) = -\frac{i \bar{P}_\mu c_4(\lambda)}{2 K_0 (2\pi)^2} \bar{\varphi}(\xi) \varphi(\xi) + \sim \bar{\varphi} \gamma_\mu \varphi. \quad (39)$$

Das bedeutet:

$$\left. \begin{aligned} \langle j_{\mu M}^{(2)}(x) \rangle_{0,1,0} &= -\frac{c_4(\lambda)}{16(2\pi)^2} \mu_0 \bar{P}_\mu [\bar{\varphi}(x), \varphi(x)]_1 + \sim [\bar{\varphi}, \gamma_\mu \varphi]_1; \\ \langle j_{\mu M}^{(2)}(x) \rangle_{1,0,0} &= +\frac{c_4(\lambda)}{16(2\pi)^2} \mu_0 \bar{P}_\mu [\bar{\psi}(x), \psi(x)]_1 + \sim [\bar{\psi}, \gamma_\mu \psi]_1, \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

wobei:

$$c_4(\lambda) = \frac{1}{2} - \lambda + \frac{\lambda(2-\lambda)}{2} \ln \frac{1}{\lambda} - \frac{\lambda(2-4\lambda+\lambda^2)}{(4\lambda-\lambda^2)^{\frac{1}{2}}} \operatorname{arc tg} \left(\frac{4}{\lambda} - 1 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (41)$$

Da nach (ig) entwickelt wurde, folgen aus (40, 35) die Zusatzmomente:

$$\mu'_P = +\frac{g^2}{16(2\pi)^2} c_4(\lambda), \quad \mu'_N = -\frac{g^2}{16(2\pi)^2} (c_4(\lambda) + c_3(\lambda)). \quad (42)$$

(42) stimmt mit $g = 4f$ wieder mit Case II überein.

5. Schlußbetrachtungen

Wir stellen zunächst die von uns in I und II berechneten Zusatzmomente zusammen:

a) Skalar, reell: $\mu'_N = 0$; $\mu'_P = + \frac{g_1^2}{2} \cdot \frac{c_1(\lambda)}{2(2\pi)^2}$;

b) Skalar, komplex: $\mu'_N = + \frac{g_2^2}{16} \cdot \frac{c_1(\lambda) - c_2(\lambda)}{(2\pi)^2}$; $\mu'_P = + \frac{g_2^2}{16} \cdot \frac{c_2(\lambda)}{(2\pi)^2}$;

c) Pseudoskalar, reell: $\mu'_N = 0$; $\mu'_P = - \frac{g_3^2}{2} \cdot \frac{c_3(\lambda)}{2(2\pi)^2}$;

d) Pseudoskalar, komplex: $\mu'_N = - \frac{g_4^2}{16} \cdot \frac{c_3(\lambda) + c_4(\lambda)}{(2\pi)^2}$; $\mu'_P = + \frac{g_4^2}{16} \cdot \frac{c_4(\lambda)}{(2\pi)^2}$;

$$c_1(\lambda) = \frac{3}{2} - \lambda + \frac{\lambda(3-\lambda)}{2} \ln \frac{1}{\lambda} - \frac{\lambda(4-5\lambda+\lambda^2)}{(4\lambda-\lambda^2)^{\frac{1}{2}}} \operatorname{arc tg} [\lambda^{-1}(4\lambda-\lambda^2)^{\frac{1}{2}}]; \quad (43)$$

$$c_2(\lambda) = \frac{5}{2} - \lambda - \frac{2-4\lambda+\lambda^2}{2} \ln \frac{1}{\lambda} - \frac{\lambda(8-6\lambda+\lambda^2)}{(4\lambda-\lambda^2)^{\frac{1}{2}}} \operatorname{arc tg} [\lambda^{-1}(4\lambda-\lambda^2)^{\frac{1}{2}}];$$

$$c_3(\lambda) = \frac{1}{2} + \lambda - \frac{\lambda(1-\lambda)}{2} \ln \frac{1}{\lambda} - \frac{\lambda^2(3-\lambda)}{(4\lambda-\lambda^2)^{\frac{1}{2}}} \operatorname{arc tg} [\lambda^{-1}(4\lambda-\lambda^2)^{\frac{1}{2}}];$$

$$c_4(\lambda) = \frac{1}{2} - \lambda + \frac{\lambda(2-\lambda)}{2} \ln \frac{1}{\lambda} - \frac{\lambda(2-4\lambda+\lambda^2)}{(4\lambda-\lambda^2)^{\frac{1}{2}}} \operatorname{arc tg} [\lambda^{-1}(4\lambda-\lambda^2)^{\frac{1}{2}}],$$

wobei $\lambda = \frac{K^2}{K^2}$. Mit $g_{1,3} = \sqrt{2}f_4$, $g_{2,4} = 4f$ gehen diese Ergebnisse, wie oben schon bemerkt, in die Caseschen über. Mit $g_{2,4}^2 = 8g_{1,3}^2$ erhält man durch Addition der reellen und komplexen Theorie die symmetrische Theorie.

Man ist heute ziemlich sicher, daß die für die Kernkräfte, also auch für die magnetischen Zusatzmomente verantwortlichen Mesonen die in der kosmischen Strahlung gefundenen und neuerdings auch künstlich erzeugten π -Mesonen mit einer Ruhmasse m_π von $m_\pi = 318 m_{\text{el}}$ (oder auch $m_\pi = 285 m_{\text{el}}$, vgl. Yukawa⁶⁾) sind ($m_{\text{el}} = \text{Elektronen-Ruhmasse}$). Für $m_\pi = 318 m_{\text{el}}$ erhält man aus (43):

$$\left. \begin{aligned} c_1(\lambda_\pi) &= +1,21; & c_2(\lambda_\pi) &= -1,88; \\ c_3(\lambda_\pi) &= +0,47; & c_4(\lambda_\pi) &= +0,35. \end{aligned} \right\} \quad (43a)$$

Die $c_1 \dots c_4$ ändern sich innerhalb des Bereiches $m_\pi = 318 \dots 285 m_{\text{el}}$ nur sehr wenig.

Nun sieht man, wie schon Luttinger⁷⁾ und Case⁸⁾ feststellten, auch ohne jede Festlegung der $g_1 \dots g_4$, daß in den einfachsten Fällen (Theorien mit einheitlichem Transformationscharakter der Feldgrößen) μ'_P und μ'_N aus (43) nicht mit dem gleichen $g_1 \dots g_4$ in Einklang mit den experimentellen Ergebnissen gebracht werden können. Wir brauchen dazu nur zu beachten, daß die experimentellen μ' (vgl. I, Abschn. I) der Beziehung:

$$\mu'_N \approx -\mu'_P \quad (44)$$

genügen.

Betrachten wir zunächst die Theorien a) bis d) einzeln, ohne Überlagerung mehrerer Mesonfelder. Offensichtlich verletzen a) und c) (44), da sie $\mu'_N = 0$; $\mu'_P \neq 0$ liefern. b) bzw. d) könnten (44) genügen, falls $|c_1| \ll |c_3|$ bzw. $|c_3| \ll |c_4|$;

⁶⁾ H. Yukawa, Rev. Mod. Phys. 21, 474 (1949).

⁷⁾ J. M. Luttinger, Helv. phys. Acta 21, 483 (1948).

das ist aber nach (43), (43a) nicht im entferntesten der Fall. — (44) kann auch nicht befriedigt werden, wenn man zwei Mesonfelder gleichen Transformationscharakters gleichzeitig mit beliebigen, reellen Kopplungskonstanten ankoppelt, etwa a) und b) oder c) und d). Jedoch würde eine gleichzeitige Kopplung von b) und d) etwa bei geeigneter Wahl von g_2 und g_4 (44) befriedigen können. Von dieser Möglichkeit möchte man aber zunächst aus anderen Gründen keinen Gebrauch machen.

Wir wollen uns jetzt klarzumachen versuchen, woher dieser Mißerfolg der Theorie kommt und wie man vielleicht mit Mesonkopplungen gleichen Transformationscharakters doch noch Übereinstimmung mit den Beobachtungen erzielen könnte.

Dazu erinnern wir uns einiger in den zu (43) führenden Überlegungen eingeführter Vernachlässigungen und Beschränkungen, deren Beseitigung eventuell lohnend sein könnte:

1. Die Korrekturglieder $\sim g^n (n > 2)$ zu μ' könnten u. U. nicht unbedeutende Beiträge liefern (g ist ja nicht etwa klein!).

2. Entsprechend Corben-Schwinger⁸⁾ kann man durch Einführung einer komplizierteren Wechselwirkung der Materie mit dem elektromagnetischen Felde unter gleichzeitiger Einführung einer neuen Naturkonstanten eine beliebige Größe des magnetischen Momentes dieser Materie erzielen. Auf diese Möglichkeit hat man bisher in den meisten Fällen verzichtet, so auch hier.

3. Es sei hier auch betont, daß wir ja nie sicher sind, ob nicht eine künftige Theorie, welche die Divergenzschwierigkeiten bei Selbsternergie und Ladung vermeidet (vielleicht mittels einer „realen Regularisierung“), auch solche Größen wesentlich ändern wird, die in der gegenwärtigen Theorie bereits als (nach „formaler Regularisierung“) eindeutig bestimmt und konvergent erscheinen.

4. Schließlich denkt man noch daran, Mesonfelder mit anderen Transformationseigenschaften und Kopplungstermen zu untersuchen. Ich vermute jedoch, daß solche Varianten der Theorie unter Beibehaltung der bisherigen Vernachlässigungen und Beschränkungen (44) ebensowenig erfüllen werden wie unsere gegenwärtige Theorie. Diese Vermutung entspringt den folgenden Überlegungen:

Es sei daran erinnert, daß in den Arbeiten von Luttinger (vgl. I, Abschnitt 1) die Theorie stets exakt $\mu'_P = -\mu'_N$ lieferte (es handelte sich um komplexe Theorien). In all diesen Arbeiten war aber die Änderung der potentiellen magnetischen Dipol-Energie des Nukleons bei der Proton-Neutron-Umwandlung oder bei einfacher Spin-Umlenkung (in virtuellen Prozessen) gegenüber der entsprechenden Energie des Mesons während dessen virtueller Existenz mit der Begründung, es sei $\frac{e}{2K_0} \ll \frac{e}{2K}$, vernachlässigt worden. Es ist aber (bei π -Mesonen) gar nicht $K_0 \gg K$, sondern: $K_0 \approx 5K$. Ferner kann man zeigen, daß bei Luttinger die virtuellen Prozesse mit extrem-relativistischen Energie-Änderungen den Hauptbeitrag zu μ' geben. Bei solchen Prozessen ist jedoch die potentielle Energie des magnetischen Dipols nicht mehr durch das nichtrelativistische Magneton bestimmt; diese potentielle Energie kann überhaupt nicht mehr von der Gesamtenergie des Teilchens getrennt werden; bei Spin-Umlenkung ändert sich die Gesamtenergie um einen Betrag, welcher mit zunehmender Gesamtenergie immer weniger von der Ruhmasse abhängt. Wenn also die virtuellen Prozesse mit extrem-relativistischen Energie-Änderungen den Hauptbeitrag zu μ' geben, dann werden Proton- und Meson-Spin-Moment beide in gleicher Größenordnung etwa an μ' beteiligt sein. Modell-

⁸⁾ H. C. Corben-J. Schwinger, Physic. Rev. 58, 953 (1940).

mäßig überlegt man sich leicht, daß die Proton-Beiträge die Beziehung (44) nicht erfüllen würden. Nun wissen wir aus unseren obigen Rechnungen, daß in (43) die (44) störenden Glieder c_1 und c_3 gerade von $\langle j_{\mu p} \rangle$, also dem „Protonen-Strom“, herrühren. Es liegt deshalb nahe, wie Case⁸⁾ c_1 und c_3 als Beiträge der elektrischen Proton-Ladung, c_2 und c_4 als Beiträge der elektrischen Meson-Ladung zu μ' anzusehen.

Demnach scheint es mir offenkundig zu sein, daß die Zerstörung der Beziehung (44) durch (43) eben daher kommt, daß Proton und Meson in etwa gleicher Stärke am Zustandekommen der μ' beteiligt sind. Daraus muß man aber folgern, daß die gleiche Schwierigkeit auch bei den anderen möglichen Meson-Theorien (vektorielle Th. usw.) zu erwarten ist.

Aber, wie gesagt, die Möglichkeiten der gegenwärtigen Theorie scheinen mir bei weitem noch nicht ausgeschöpft zu sein.

6. Anhang

Hier soll gezeigt werden, daß man zur Ableitung einer Beziehung zwischen der mesischen Ladung g eines Dirac-Teilchens und derjenigen g' des zugehörigen Antiteilchens als Voraussetzung nur die Ladungssymmetrie braucht. Case⁸⁾ hatte zur Ableitung der gleichen Beziehung auch noch die Zeitsymmetrie benutzt.

Ich führe dies im Falle der Kopplung eines Dirac-Feldes an ein reelles Mesonfeld vor; die Übertragung auf komplexes Mesonfeld ist sehr einfach. Der Kopplungsterm in der Lagrange-Dichte sei also:

$$\bar{L} \doteq U(g\bar{\psi}O\psi + g'\bar{\psi}'O\psi'). \quad (45)$$

(Da natürlich $U = U'$). Tensor-Indizes von U und O sind weggelassen; U soll aber ein beliebiger schiefsymmetrischer Tensor und O der zugehörige Operator aus γ -Matrizen sein können. $\bar{\psi}', \psi'$ sind die in der Einführung zu I besprochenen „Ladungskonjugierten“ zu $\bar{\psi}, \psi$. Aus (I, 8) folgt:

$$\bar{L} = U(g\bar{\psi}O\psi - g'\bar{\psi}'O^{-1}C\psi').$$

Man zeigt mit (I, 8) leicht, daß $O^{-1}C = \pm O^T$, wo das positive Vorzeichen gilt, wenn $\bar{\psi}O\psi$ ein schiefsymmetrischer Tensor 0., 3. und 4. Stufe, das negative, falls $\bar{\psi}O\psi$ ein schiefsymmetrischer Tensor 1. oder 2. Stufe ist. Wir haben also:

$$\bar{L} = U(g\bar{\psi}O\psi \mp g'\bar{\psi}'O^T\psi').$$

Nun überlegt man sich leicht (am einfachsten mit Hilfe der Wechselwirkungsdarstellung), daß eine Größe der Form $(\bar{\psi}O\psi + \psi O^T\bar{\psi})$ auf Grund der Vertauschungsregeln überhaupt kein Operator ist, keine Abhängigkeit von der speziellen Gestalt von ψ besitzt. Ein solcher Ausdruck ist aber als Kopplungsterm unbrauchbar. Um also ein brauchbares \bar{L} zu erhalten, muß g' so gewählt werden, daß in jedem Falle

$$\bar{L} = U g [\bar{\psi}, O\psi]$$

erscheint. D. h.:

$$\begin{aligned} g' &= +g \text{ für skalare, pseudovektorielle und pseudoskalare,} \\ g' &= -g \text{ für vektorielle und tensorielle Kopplung.} \end{aligned} \quad | \quad (46)$$

Dank schulde ich Herrn Prof. Dr. F. Hund für die Anregung zu dieser Arbeit sowie wertvolle Diskussionen und Hinweise während ihrer Entstehung, ferner Herrn Dr. H. Lehmann für manchen freundlichen Hinweis.

Jena, Theoretisch-Physikalisches Institut der Universität.

(Bei der Redaktion eingegangen am 4. April 1951.)

Die Absorptionsspektren von Chromalaunmischkristallen¹⁾

Von Ernst Golling

(Mit 7 Abbildungen)

Inhaltsübersicht

Es wurden die Absorptionsspektren von Mischalaunen untersucht, bei denen das Cr⁺⁺⁺-Ion durch andere 3wertige Metallionen (Al⁺⁺⁺, Fe⁺⁺⁺) ersetzt wurde. Außerdem wurden noch Sulfat—Selenat, K—NH₄-Mischungen und ternäre Mischkristalle untersucht. Der Austausch der Me^{III}-Ionen gab Verschiebungen, die entsprechend der großen Entfernung vom Cr-Ion kleiner sind, als wie sie beim Austausch von Selenat—Sulfat oder des einwertigen Radikals entstehen.

Beim KCr-Selenatalaun ergibt sich in den Mischkristallen eine Schrumpfung des charakteristischen Dubletts, der die meisten Überlagerungslinien (nicht aufgelöste Dubletts) folgen, indem ihre Schärfe zunimmt. Dies führt zu einem nahezu vollständigen Niveauschema des KCr-Selenatalauns. Die Schwingungsstufen von Grund- und angeregtem Term sind etwas verschieden, lassen sich aber zwanglos einander zuordnen. In vielen Fällen genügt die einfache Addition einer kleinen Schwingungsdifferenz.

Bei den Sulfaten ist die Hauptlinie (= nicht aufgelöstes Dublett) von 4 schwachen aber sehr scharfen Linien umgeben, die bei Ersatz von K durch NH₄ praktisch stehen bleiben, während sich die Hauptlinie verschiebt. Daraus wird als wahrscheinlichste Deutung der festen Linien der Übergang zum $^4F\Gamma_5$ -Term angenommen.

In den Mischkristallspektren nimmt die Intensität der Linien und des grünen Kontinuums trotz gleicher Cr-Ionenanzahl in der durchstrahlten Schicht ab. Die kontinuierliche Absorption ist außerdem im unverdünnten Cr-Alaun schon viel schwächer als im Rubin.

Magnetische Kopplungseffekte machten sich nicht bemerkbar, da die durch sie bedingte Linienbreite viel kleiner ist als die Temperaturbreite. Ebenso wenig sind Anzeichen von geordneten Mischphasen beobachtet worden.

Bei den ternären Mischkristallen verhalten sich Linienverschiebungen und Linienverbreiterungen wenigstens vorzeichenmäßig additiv.

I. Einleitung

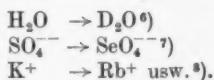
Die Untersuchung der mit Elektronenübergängen verknüpften Linienspektren fester Körper soll Aufschluß geben, inwieweit die Elektronenhülle der Ionen beim Zusammentritt zum Kristallgitter verändert wird. Bei den Seltenen Erden liegen die Dinge verhältnismäßig einfach, weil die an den Übergängen beteiligten 4f-Elektronen durch die weiter außen liegende 5s, p-Schale vor allzu großen Störungen

1) Gekürzte Münchener Dissertation.

geschützt werden. Infolgedessen kann man zur theoretischen Deutung mit gutem Erfolg die Umgebung durch ein elektrisches Feld bestimmter Symmetrie ersetzen¹⁾. Viel stärkeren Eingriffen ist die 3d-Schale in den Ionen der Eisengruppe ausgesetzt, deren Übergänge aber immerhin noch relativ scharfe Linien geben, obwohl sich hier die Leuchtelektronen in der äußersten Schale befinden. Daß überhaupt bei den Ionen der Übergangselemente im Gegensatz zu den edelgasartigen Ionen scharfe Linien auftreten, röhrt daher, daß nur bei ihnen Elektronenübergänge ohne Änderung der Hauptquantenzahl und damit der Raumbeanspruchung möglich sind.

Ein besonders günstiges Untersuchungsobjekt ist das Cr⁺⁺⁺-Ion. In älteren Arbeiten²⁾ wurden die stärksten der in Kristallen auftretenden Linien des Cr⁺⁺⁺ den durch elektrische Felder modifizierten Multipletts $^4F - ^2G$ und $^4F - ^2H$ des freien Ions zugeordnet, zumal bei fast allen Cr⁺⁺⁺-Verbindungen gerade in diesen Spektralbereichen (15000 bzw. 22000 cm⁻¹) Linien liegen. Van Vleck und Finkelstein³⁾ zeigten aber, daß die Störungen viel zu groß sind, als daß man noch die ursprünglichen Multipletts erkennen könnte. Sie berechnen für das charakteristische Dublett, ausgehend von den Termen des freien Ions und kubischen Kristallfeld 18200 cm⁻¹ und ordnen es dem Übergang $^4F_1 - ^2F_3$ zu⁴⁾. Wegen der Größe der Störung, deren Wert nur abgeschätzt werden kann, ist von vornherein eine große Abweichung zwischen Rechnung und Beobachtung zu erwarten, so daß die Differenz von 3000 cm⁻¹ nicht zu verwundern ist.

Von der experimentellen Seite her bieten die Alaune wie keine andere Verbindungsklasse die Möglichkeit, Feinheiten der Feldwirkung dadurch zu studieren, daß man die Nachbarn des Cr⁺⁺⁺-Ions auswechselt. In dieser Hinsicht sind untersucht, wenn man beim Cr⁺⁺⁺-Ion von den nächsten zu ferneren Nachbarn fortschreitet:



Beim Austausch H₂O gegen D₂O wurde festgestellt, daß ein Teil der Cr-Alaunlinien Kombinationen von Schwingungs- und Elektronenübergängen zuzuordnen ist. Noch nicht eingehend untersucht ist der Austausch der 3wertigen Metallionen selbst, also der vom Cr⁺⁺⁺-Ion am weitesten entfernten Bausteine. Hier liegen die Dinge schwieriger, weil ja das Chromion selbst als Träger der Absorption wirkt. Es kann also nur ein partieller Ersatz des Cr⁺⁺⁺-Ions durch 3wertige Metallionen erfolgen, d. h., man muß zu Mischkristallen übergehen. Dabei ergibt sich unter anderem die Frage, ob sich die Änderung des Magnetismus der Ionen beim Übergang von Cr⁺⁺⁺ zu Al⁺⁺⁺ oder von Cr⁺⁺⁺ zu Fe⁺⁺⁺ spektroskopisch auswirkt. Die

¹⁾ H. Bethe, Ann. Physik 8, 133 (1929); H. A. Kramers, Proc. Acad. Amsterdam 33, 959 (1930); W. Opechowski, Physica 7, 552 (1940); K. H. Hellwege, Ann. Physik 4, 96–160 (1948).

²⁾ O. Deutschbein, Ann. Physik 14, 712 (1932).

³⁾ J. H. van Vleck, J. chem. Physics 8, 787 (1940); R. Finkelstein und J. H. van Vleck, J. chem. Physics 8, 790 (1940).

⁴⁾ Wegen der Bezeichnungen des Kristalsterme vgl. H. Bethe, l. c.

⁵⁾ H. Böhm, Ann. Physik 32, 521 (1988).

⁶⁾ H. Sauer, Ann. Physik 87, 197 (1928); G. Joos u. K. Schnetzler, Z. physik. Chem. 20, 1 (1933).

⁷⁾ H. Sauer, Ann. Physik 87, 197 (1928); G. L. Kraus, G. C. Nutting, J. chem. Physics 9, 133 (1941).

Änderung der magnetischen Eigenschaften ist ganz erheblich, da Al^{+++} diamagnetisch ist, während das Cr^{+++} -Ion 3,87 und das Fe^{+++} -Ion 5,87 effektive Bohrsche Magnetonen besitzt⁹⁾. Die optische Bestimmung der magnetischen Kopplung der Me^{III} -Ionen wäre im Hinblick auf die Verwendung der Chromalaune zur magnetischen Abkühlung von Wert.

Mit dem Übergang zu Mischkristallen erheben sich noch andere Fragestellungen, z. B. die Frage nach geordneten Mischphasen, die sich im Spektrum durch neue Aufspaltungen und größere Linienschärfe bemerkbar machen dürften. Da die Möglichkeit des Überganges Ordnung-Unordnung nicht auf Mischkristalle mit verschiedenen 3wertigen Ionen beschränkt ist, wurden auch Mischkristalle Selenat-Sulfat, Kalium-Ammonium und der gleichzeitige Ersatz von Kalium und Chrom durch Ammonium und Aluminium, bzw. Ammonium und Eisen untersucht.

II. Die untersuchten Kristalle und ihre Herstellung

Aus 8 verschiedenen Alaunen wurden die folgenden 6 Kombinationen

1. $\text{KCr}(\text{SeO}_4)_2 \cdot 12 \text{H}_2\text{O}$ und $\text{KAl}(\text{SeO}_4)_2 \cdot 12 \text{H}_2\text{O}$
2. $\text{KCr}(\text{SO}_4)_2 \cdot 12 \text{H}_2\text{O}$ und $\text{KAl}(\text{SO}_4)_2 \cdot 12 \text{H}_2\text{O}$
3. $\text{KCr}(\text{SO}_4)_2 \cdot 12 \text{H}_2\text{O}$ und $\text{KFe}(\text{SO}_4)_2 \cdot 12 \text{H}_2\text{O}$
4. $\text{KCr}(\text{SO}_4)_2 \cdot 12 \text{H}_2\text{O}$ und $\text{NH}_4\text{Cr}(\text{SO}_4)_2 \cdot 12 \text{H}_2\text{O}$
5. $\text{KCr}(\text{SO}_4)_2 \cdot 12 \text{H}_2\text{O}$ und $\text{NH}_4\text{Al}(\text{SO}_4)_2 \cdot 12 \text{H}_2\text{O}$
6. $\text{KCr}(\text{SO}_4)_2 \cdot 12 \text{H}_2\text{O}$ und $\text{NH}_4\text{Fe}(\text{SO}_4)_2 \cdot 12 \text{H}_2\text{O}$

unter Beibehaltung der Cr-Alaune als Träger der Absorption ausgewählt und davon Mischkristalle mit den molaren Mischungsverhältnissen $M = 10:1, 5:1, 1:1, 1:5, 1:10$ dargestellt. Von der 6. Mischkristallreihe außerdem noch das Verhältnis 1:20, weil sich bei dieser Kombination noch bei 1:10 die Linien mit merklicher Intensität zeigten.

Von den zur Reinigung mehrfach umkristallisierten, käuflichen Substanzen wurden etwa 1/10 molare Lösungen hergestellt und diese so gemischt, daß die oben angegebenen Verhältnisse entstanden. Die dazu notwendigen Wägungen wurden wegen der schnellen Verwitterung der Kristalle nach einer konstanten Trocknungszeit ausgeführt. Volumenbestimmungen des zweimal destillierten Wassers sind unter Berücksichtigung der Temperatur ausgeführt worden. Die Darstellung der nicht käuflichen Alaune erfolgte nach den Vorschriften in Abegg-Auerbachs Handbuch der Chemie.

Auskristallisiert wurde im Exsikkator, da sich durch Auspumpen die Verdunstungsgeschwindigkeit in weiten Grenzen ändern ließ. Als Trockenmittel diente CaCl_2 . Zu Beginn der Kristallisation wurde der Druck auf 15 bis 20 Torr gesenkt. In wenigen Tagen bildeten sich einige kleine Kristalle. Sie wurden aus der Mutterlauge entfernt, diese in ein gut gereinigtes Becherglas filtriert und nun mit einem schön gewachsenen Kristallkeim geimpft. Die weitere Kristallisation erfolgte bei 50 Torr im Exsikkator und lieferte in 14 Tagen bis 4 Wochen große und klare Kristalle. Befinden sich mehrere Lösungen im gleichen Exsikkator, so ist darauf zu achten, daß alle Kristallizerschalen gleichen Durchmesser haben. Aus den Schalen mit weitem Durchmesser verdunstet das Wasser schneller, als aus engen, weshalb der Exsikkator schon vor der Beendigung der Kristallisation

⁹⁾ Vgl. Landolt-Börnstein.

aller Lösungen geöffnet werden muß. Dies gab stets zu Wachstumsstörungen Anlaß. Die Temperatur im Kristallisierraum betrug 18°C und war bis auf $\pm 1^{\circ}$ konstant.

Das Mischungsverhältnis M im Kristall weicht etwas von dem der Lösung ab. Eine kolorimetrische Bestimmung und eine quantitative chemische Analyse der Kristalle lieferte folgende Werte von M bei der Kombination $\text{KCr}(\text{SO}_4)_2 \cdot 12 \text{H}_2\text{O}$ und $\text{NH}_4\text{Fe}(\text{SO}_4)_2 \cdot 12 \text{H}_2\text{O}$ (Tabelle 1). Die Genauigkeit war bei mittleren Mi-

Tabelle 1

M Lösung	M Kristall		M Lösung	M Kristall	
	chemisch	kolorim.		chemisch	kolorim.
10:1	12:1	11:1	1:5	1:6	1:6
5:1	6,5:1	6:1	1:10	1:11	1:11
1:1	1:1	1:1			

schungsverhältnissen etwa dieselbe wie bei der Herstellung der Lösungen (rund $\pm 1\%$). Zur kolorimetrischen Bestimmung diente ein Monochromator mit einem Selenphotoelement als Strahlungsempfänger. Die Mischkristalle wurden hierzu in Wasser aufgelöst und in Anbetracht der großen Verdünnung die Gültigkeit des Beerschen Gesetzes zugrunde gelegt. Die Auflösung in Wasser war notwendig, da sich im Kristall die kontinuierliche Absorption durch die Änderung der Gitterbausteine verschiebt (siehe S. 192). Lösungsmittel und Lösung befanden sich in 2 planparallelen Küvetten. Die Messung erfolgte mit der Wellenlänge $\lambda_0 = 6000 \text{ \AA}$, da hier die Fe-Alaun-Lösung keine Absorption zeigte. Eine 3 Monate später durchgeführte Messung führte zum gleichen Ergebnis, ein Beweis, daß die Lösungen stabil waren. Die Übereinstimmung der chemischen Analyse und der kolorimetrischen Bestimmung ist befriedigend.

Obwohl in den Mischkristallen die Bausteine in der nächsten Umgebung des Chromions dieselben bleiben, sind in den Spektren Veränderungen allein schon dadurch zu erwarten, daß der Austausch des 3wertigen Ions Änderungen der Gitterparameter hervorruft. Streng genommen hätte zu ihrer Ermittlung eine röntgenographische Präzisionsbestimmung durchgeführt werden müssen. Da aber die beobachteten Änderungen im optischen Spektrum verhältnismäßig klein und wegen der Linienbreite nur mit einem erheblichen Fehler meßbar sind, lohnte sich dieser Aufwand nicht. Es wurde deshalb als qualitatives Maß für die Gitterkonstante der Ausdruck $\sqrt[3]{\text{Molekulargewicht}/\text{Dichte}}$ bestimmt. Eine Prüfung dieser Werte an Hand der für die reinen Alaune bekannten Gitterkonstanten (Abstand Cr-Ion-Cr-Ion) zeigte eine gute Übereinstimmung.

Das Molekulargewicht der Alaumischkristalle ergibt sich aus dem Mischungsverhältnis der Komponenten und den Molekulargewichten der reinen Ausgangsstoffe. Die Dichte ρ wurde nach der Schwebemethode bestimmt. Als Lösungen dienten Bromoform $\rho = 2,9$ und Benzol $\rho = 0,87$. Bei 100 cm^3 Lösung machte sich die Zugabe eines Tropfens noch bemerkbar. Nachdem die Kristalle in der Lösung schwieben, erfolgte mehrmals die Bestimmung der Dichte durch Auswiegen mit einem Pyknometer. Die Temperatur blieb bis auf $\pm 0,2^{\circ}\text{C}$ konstant.

Während die Kristalle zum Schweben gebracht wurden, konnte festgestellt werden, daß Mischkristalle, die aus der gleichen Lösung stammten, nicht genau gleiche Dichten besitzen. Die maximalen Abweichungen betragen ± 2 Einheiten

der 3. Dezimalstelle von ϱ ($\varrho \approx 1,8 \text{ [g cm}^{-3}\text{]}$). Es handelte sich dabei stets um klare und vollkommen gleich behandelte Einkristallstücke. Die Ursache ist darin zu suchen, daß — wie schon oben erwähnt — Kristall und Lösung verschiedene Mischungsverhältnisse haben, was für zeitlich später auskristallisierende Keine notwendigerweise eine andere Zusammensetzung ergeben muß. In der Abb. 1 sind die Ergebnisse graphisch dargestellt. Man kann deutlich erkennen, daß die Än-

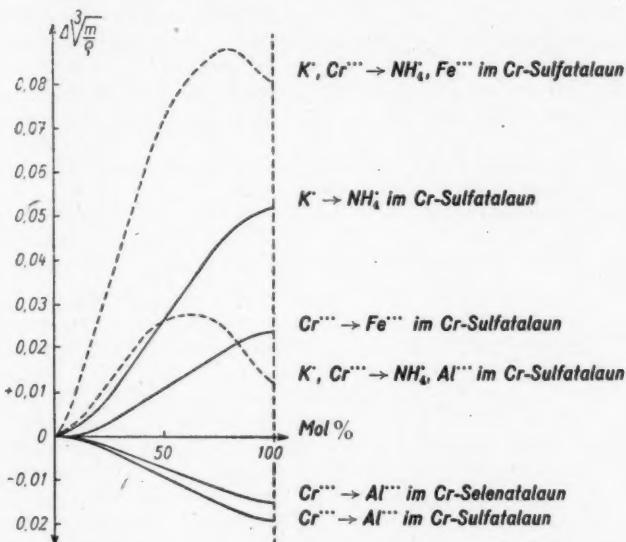


Abb. 1. Auf der Abszisse ist die Zusammensetzung in Molprozent des Austauschstoffes angegeben, z. B. 0 = reiner Cr-Alaun; 100 = reiner Al-Alaun. Auf der Ordinate ist der Ausdruck

$$4\sqrt[3]{\frac{m}{\varrho}} = \sqrt[3]{\frac{m_x}{\varrho_x}} - \sqrt[3]{\frac{m_0}{\varrho_0}}$$

aufgetragen. Die Indizes „0“ gehören zu den reinen Cr-Alaunen, die Indizes „x“ zu den Mischkristallen. In dieses Diagramm können auch die Daten für die doppelten Mischkristalle $K, Cr \rightarrow NH_4$, Fe eingetragen werden, da gleichzeitig mit jedem Ion Cr gegen Fe auch 1 Ion K gegen NH_4 ausgetauscht wurde. Die ausgezogenen Linien kennzeichnen die einfachen (binären) Mischkristalle, die gestrichelten Linien die doppelten (ternären) Mischkristalle

derungen der Gitterdimensionen beim gleichzeitigen Austausch von 2 Ionen wesentlich anders verlaufen, als bei einem Ion. Die Abweichungen der Kurven von der Geraden sind außerhalb der Fehlergrenze. Für die „Ersatzgitterkonstante“ gilt also die lineare Abhängigkeit, die bei Ionenmischkristallen einfacher Bauart gefunden wurde, nicht streng, aber bei binären Mischkristallen noch mit guter Näherung, während die ternären ein deutliches Maximum aufweisen.

III. Optische Versuchsanordnung

Die Untersuchung fand bei der Temperatur des flüssigen Sauerstoffs statt und erstreckte sich auf den roten und blauen Durchlässigkeitsbereich.

Aus den Einkristallen wurden Stücke von 2 bis 15 mm Dicke herausgeschnitten, die Schnittflächen mit einer angerauhten Glasplatte geschliffen und mit weichem Papier nachpoliert. Die Dicke der Kristalle wurde so gewählt, daß mit zunehmender Verdünnung des Cr-Alauns die Schichtdicke etwa im Verhältnis der Verdünnung zunahm. Es sollte damit erreicht werden, daß sich bei jedem Mischungsverhältnis annähernd die gleiche Zahl von Cr-Ionen in der durchstrahlten Schicht befindet.

Die Kristalle wurden in Preßstoffrähmchen eingekittet und befanden sich in direktem Kontakt mit dem flüssigen Sauerstoff. Das Rähmchen hing an einem Messingrohr, das stramm in der Abdeckplatte des unversilberten Dewargefäßes saß. Das Rohr ermöglichte bei langen Belichtungszeiten das Nachfüllen von flüssigem Sauerstoff ohne Unterbrechung der Aufnahme.

Als Spektralapparat diente im „Rot“ ein auf Spiegelmetall geritztes Anderson-Plangitter mit einer geteilten Fläche von 8×5 cm und rund 75000 Strichen. Das Gitter war in einem Steinheil-Spektrographen mit 1600 mm Brennweite montiert. Die Lineardispersion betrug in der ersten Ordnung 6,14 Å pro mm.

Für die Aufnahmen im blauen Spektralbereich genügte schon das Auflösungsvermögen und die Lineardispersion des Steinheil-Glasspektrographen mit 3 Prismen und einer Brennweite des Kameraobjektivs von 640 mm.

Die Aufstellung der Beleuchtungseinrichtung und die Kristallbefestigung entsprachen im wesentlichen der Anordnung von Sauer (l. c.), lediglich die Abbildung der Kristalle auf den Spektrographenspalt mittels Kombination einer Zylinderlinse mit einem Kondensor und die verwendeten Filter weichen davon ab. Die Anwendung einer nicht objektgetreuen Abbildung des Kristalls auf den Spalt war notwendig, da es selbst bei vorsichtigstem Eintauchen nur selten gelang, die Mischkristalle in die Kühlflüssigkeit zu bringen, ohne daß sie zersprangen. Diese Sprünge waren aber die Ursache zu vielen störenden Streifen im Spektrum. Bei den immerhin nur vereinzelt auftretenden Sprüngen handelt es sich nicht um die von Kraus und Nutting (l. c.) beobachtete Strukturumwandlung, die unterhalb 80° K zur Pulverisierung der Präparate führt. Der Verdacht, daß durch die Sprünge falsches, von Absorption nicht betroffenes Licht in den Spektrographen gelangte und so eine vermindernde Absorption vortäuschte, ist dadurch widerlegt, daß bei stigmatischer Abbildung die Sprünge stets als schwarze Streifen im Spektrum aufraten.

Die ganze Beleuchtungseinrichtung war auf einem fahrbaren Tisch montiert. Dadurch konnten die Aufnahmen vom roten und blauen Teil des Spektrums hintereinander und mit dem gleichen Kristall ausgeführt werden, indem der Tisch vor den zweiten Spektrographenspalt gerückt wurde. Die Verschiedenheit der Lichtstärke der beiden Apparate gestattete es, trotz der sehr unterschiedlichen Durchlässigkeiten des Kristalls für rotes und blaues Licht (Intensitätsverhältnis etwa 50:1), mit annähernd gleichen Belichtungszeiten auszukommen.

Beleuchtet wurde der Kristall zur Aufnahme des roten Spektrums mit dem gefilterten Licht einer automatisch regulierenden Kohlenbogenlampe. Im Blauen erwies sich eine hochbelastbare Wolfram-Punktlichtlampe wegen der starken und kaum vermeidbaren Banden des Kohlebogens geeigneter.

Als Filter diente eine 5 cm dicke, mit Wasser gefüllte Küvette. Für die Aufnahmen im Rot wurde zusätzlich noch ein Schottfilter RG 1 mit steil abfallender Absorptionskurve bei 6000 Å verwendet. Es sollte damit erreicht werden, daß der Kristall im wesentlichen nur Licht des interessierenden Spektralbereiches empfängt.

Perutz-Spektralplatten „rot“ mit einer maximalen Empfindlichkeit bei 6800 Å und Perutz-Perseno-Platten fanden als Aufnahme-Material Verwendung. Die Belichtungszeit betrug bei einer Spaltbreite von 0,01 mm in der Regel 10 Minuten. Einzelne Aufnahmen mit sehr dicken Kristallen mußten mitunter bis zu mehreren Stunden belichtet werden. Entwickelt wurde mit einem selbst bereiteten Resorcin-Ätzkali-Entwickler, der sehr kontrastreich arbeitet und trotzdem noch ein relativ feines Korn liefert. Mit ihm ließen sich auch noch schwache Linien klar herausarbeiten.

Die Aufnahmen des roten Spektrums erhielten in üblicher Weise Schwärzungsmarken. Als Vergleichsspektrum dienten die roten Linien des Ne-Spektrums und die Linien des Fe-Bogens.

IV. Auswertung der Aufnahmen

Die Linienabstände auf den Platten wurden im roten Teil des Spektrums mit einem Zeiss-Komparator gemessen und daraus die λ -Werte durch rechnerische Interpolation zwischen den Ne-Linien ermittelt. Aus der Tabelle der „Schwingungszahlen“ von Kayser¹⁰⁾ sind dann die zugehörigen ν -Werte entnommen worden. Die Dispersionskurve war so wenig gekrümmmt, daß an den linear interpolierten Werten nur bei den schärfsten Linien quadratische Korrekturen angebracht werden mußten. Mit Ausnahme der ternären Mischkristalle sind die Wellenlängen auch aus den mit einem Zeißschen Registrierphotometer hergestellten Photometerkurven bestimmt worden. Bei den schwächsten und sehr diffusen Linien traten zwischen den Ergebnissen der beiden Verfahren nur selten Abweichungen bis zu 1 Å auf. Die Genauigkeit der photometrischen Auswertung betrug bei den schärfsten Linien $\pm 0,1 \text{ Å} (= \pm 0,22 \text{ cm}^{-1})$ und sank auf $\pm 1,5 \text{ Å} (= \pm 3,4 \text{ cm}^{-1})$ bei den schwachen und sehr diffusen Übergängen.

Im blauen Teil der linienhaften Absorption geschah die Auswertung nur mit dem Komparator, da bei der Verwaschenheit der Linien ihre Lage auf den Registrierkurven schlechter zu erkennen ist, als bei okularer Beobachtung und Punktierung. Die Bestimmung der Wellenlängen erfolgte graphisch aus der Dispersionskurve. Es ergab sich für die Selenatalaune ein Fehler von $\pm 1,0 \text{ Å}$ ($= \pm 5,0 \text{ cm}^{-1}$) und bei den bis zu 20 Å breiten (Halbwertsbreite) Linien der übrigen Spektren $\pm 5,0 \text{ Å}$ ($= \pm 20 \text{ cm}^{-1}$).

Ein Maß für die Intensität einer Spektrallinie ist das Integral $\int \chi(\nu) d\nu$. $\chi(\nu)$ bedeutet den Absorptionskoeffizienten als Funktion von ν . Dieser wurde für eine Reihe von Kurvenpunkten bestimmt und die erhaltenen Werte auf Millimeterpapier aufgetragen. Die Integration erfolgte durch Auszählen der Quadrate, wobei zur Zahl der ganzen, noch die Hälfte der von der Kurve angeschnittenen addiert wurde. Als Kristalldicke ist nicht der mit der Mikrometerschraube gemessene geometrische Wert, sondern nur der von Cr-Alaun in den Mischkristallen eingenommene Raum berücksichtigt worden. Durch die mit der Verdünnung wachsend gewählten Kristalldicken, blieben die Absorptionsverhältnisse annähernd konstant.

¹⁰⁾ H. Kayser, Tabelle der Schwingungszahlen. Leipzig 1928.

Der Fehler in der Intensitätsbestimmung ist bei starken Linien und gut bestimmbarer Grenze der kontinuierlichen Absorption $\pm 10\%$, kann aber an den ganz schwachen und diffusen Linien, bei denen sich die Strichbreite der Photometerkurve und das Plattenkorn schon sehr stark bemerkbar machen, bis auf $\pm 100\%$ ansteigen. Von den nicht photometrierten Spektren (ternäre Mischkristalle) und allen blauen Absorptionslinien sind die Intensitäten nur geschätzt.

Die relativen Intensitäten sind im roten und blauen Bereich der Selenataune und in dem Spektrum des Mischkristalls KCr-Selenat-Sulfat-Alauns auf die Intensität der stärksten Dublettlinie $14899,1 \text{ cm}^{-1}$ des reinen $\text{KCr}(\text{SeO}_4)_2 \cdot 12\text{H}_2\text{O}$ bezogen. Dieser Linie wurde der Wert 10 gegeben. Bei allen Sulfatalaunen und dem Ammonium-Chrom-Sulfatalaun auf die Gesamtintensität der Liniengruppe bei $14926,3 \text{ cm}^{-1}$.

Da sich vielfach die Linien überdecken, mußten zur Intensitätsbestimmung die Liniengruppen erst in Einzellinien aufgelöst werden. Die Abb. 2 zeigt die Zerlegung der Liniengruppe des KCr-Selenatalauns bei rund 15000 cm^{-1} . Auf der Abszisse sind die Wellenzahlen und nach unten die zugehörigen Intensitäten aufgetragen. Die Linie $15097,5 \text{ cm}^{-1}$ ist von der Linie $15086,1 \text{ cm}^{-1}$ bei visueller Beobachtung der photographischen Platte viel deutlicher getrennt, als auf der Photometerkurve, bzw. der Intensitätsverteilung der Abb. 3. Die Zerlegung ist nur dann einigermaßen willkürlich möglich, wenn die einzelnen

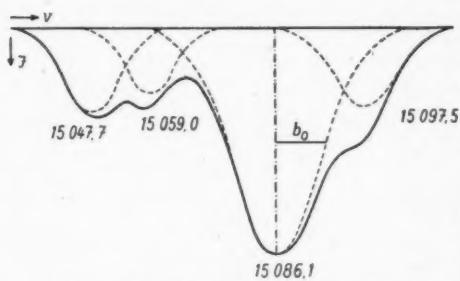


Abb. 2. Beispiel für die Zerlegung eines Liniengruppeneines

Linien als symmetrisch vorausgesetzt werden. An der Darstellung ist deutlich zu erkennen, daß durch die gegenseitige Überdeckung der Linien, die Abstände der Maxima in der Summationskurve schrumpfen. Eine Korrektur dieses Schrumpfungseffekts wurde nicht durchgeführt, da sie wegen der großen Linienbreite noch innerhalb der erreichbaren Meßgenauigkeit lag. Unter der Halbwertsbreite b_0 sei die in der Abb. 2 angegebene Entfernung in Å verstanden.

V. Ergebnisse

Die gemessenen Wellenlängen, Wellenzahlen, Intensitäten und Halbwertsbreiten der Selenatalaun-Mischkristalle sind in der Tabelle 2 zusammengestellt¹¹⁾.

Unter J und b_0 sind bei den photometrisch ausgewerteten Spektren die gemessenen Intensitäten und Halbwertsbreiten angegeben. Von den nur mit dem Komparator gemessenen Linien enthalten die Rubriken die geschätzten Intensitäten und eine kurze Charakterisierung der Linien. Es bedeuten: ss = sehr scharf, s = scharf, b = breit, bb = sehr breit. Im reinen KCr-Selenat sind die Linien von rot nach blau laufend durchnummieriert worden. Die diesen entsprechenden Linien in den Mischkristallen erhielten die gleichen Nummern.

¹¹⁾ Die Werte der übrigen Mischkristallspektren können im Physikalischen Institut der Technischen Hochschule München eingesehen werden.

Tabelle 2
KCr(SeO₄)₂ · 12 H₂O und KAl(SeO₄)₂ · 12 H₂O

KCr(SeO₄)₂ · 12 H₂O rein

Lfd. Nr.	λ [Å]	ν [cm ⁻¹]	J	b_0	Lfd. Nr.	λ [Å]	ν [cm ⁻¹]	J	b_0
1	6761,2	14786,2	1,0	2,9	21	6518,7	15336,3	1,4	3,8
2	6749,2	14812,5	1,0	3,1	22	6492,9	15397,2	1,8	4,0
3	6736,8	14839,8	0,5	2,5	23	6477,5	15433,8	1,2	2,0
4	6724,9	14866,0	0,5	2,5	24	6463,3	15467,6		
5	6720,0	14876,9	0,2	2,0	25	6459,9	15475,8	10	3,0
6	6709,9	14899,1	10	1,1	26	6442,1	15518,6	3,5	3,8
7	6708,1	14903,3	10	1,1	27	6437,4	15529,9	2,3	1,8
8	6695,2	14931,3	0,7	2,2	28	6416,2	15581,3	0,7	4,2
9	6682,6	14960,1	2,2	3,8	29	6394,8	15633,4	1,9	3,8
10	6669,8	14988,8	0,7	1,6	30	6378,9	15672,4	2,8	
11	6659,1	15012,9	2,6	2,4	31	6362,2	15713,5	2,4	2,0
12	6643,7	15047,7	3,7	2,5	32	6349,0	15746,2	0,8	1,6
13	6638,7	15059,0	2,1	2,2	33	6342,5	15762,3	0,9	1,6
14	6626,8	15086,1	8,5	3,2	34	6308,8	15846,5	0,9	2,0
15	6621,8	15097,5	3,5	2,4	35	6291,5	15890,1	0,9	2,0
16	6606,0	15133,6	2,0	1,8	36	4543	22006	2	b
17	6595,4	15157,9	1,0	1,4	37	4524	22098	2	b
18	6569,9	15216,7	9,2	3,5	38	4475	22340	4	b
19	6564,8	15228,6	5,8	3,2	39	4460	22415	3	b
20	6552,0	15258,3	1,0	1,5					

Cr³⁺:Al³⁺ = 10:1

Lfd. Nr.	λ [Å]	ν [cm ⁻¹]	J	b_0	Lfd. Nr.	λ [Å]	ν [cm ⁻¹]	J	b_0
3	6736,6	14840,2	0,5	2,3	21	6518,3	15337,2	1,3	3,0
4	6725,3	14864,7	0,5	2,7	22	6492,3	15398,6	1,8	4,0
5	6720,5	14875,7	0,2	1,6	23	6477,9	15432,8	1,3	3,4
6	6710,5	14898,0	7,8	1,2	25	6460,5	15474,4	7,5	3,2
7	6708,6	14902,1	7,5	0,9					
8	6694,7	14933,1	0,5	2,2	26	6441,8	15519,3	3,0	4,0
9	6684,1	14956,8	1,6	3,8	27	6437,3	15530,2	1,3	2,0
10	6670,3	14987,7	0,5	1,5	28	6417,0	15579,3	0,8	4,5
11	6659,6	15011,8	2,0	2,7	29	6395,2	15632,4	1,8	4,0
12	6644,7	15045,4	2,5	2,3	30	6379,0	15672,1	2,8	2,6
13	6638,0	15060,6	1,4	2,3	31	6363,4	15710,5	2,5	2,0
14	6627,8	15083,8	6,3	3,2	32	6349,8	15744,2	0,7	1,6
15	6622,8	15095,2	2,4	2,0	33	6343,0	15761,1	0,5	1,7
16	6605,8	15134,0	2,0	1,9	36	4544	22001	2	b
17	6596,4	15155,6	1,2	1,5	37	4525	22093	2	b
18	6570,2	15216,0	6,7	3,6	38	4477	22330	4	b
19	6563,4	15231,8	3,3	3,2	39	4461	22410	3	b
20	6552,3	15257,6	0,8	1,6					

Tabelle 2 (Fortsetzung)

Cr^{III}:Al^{III} = 5:1

Lfd. Nr.	λ [Å]	ν [cm ⁻¹]	J	b_0	Lfd. Nr.	λ [Å]	ν [cm ⁻¹]	J	b_0
3	6738,5	14836,0	0,4	2,4	21	6520,4	15332,3	1,0	2,5
4	6724,2	14867,6	0,4	2,5	22	6493,8	15395,1	1,5	3,8
5	6719,5	14878,0	0,2	1,6	23	6478,7	15430,9	0,7	2,2
6	6710,9	14897,1	5,5	1,1	24	6463,8	15466,5	6,1	3,1
7	6709,1	14901,1	5,2	1,0	25	6461,2	15472,7		
8	6695,6	14931,1	0,3	1,7	26	6442,1	15518,6	2,5	3,8
9	6694,6	14955,6	1,4	3,5	27	6437,3	15530,2	0,8	2,2
10	6669,6	14989,3	0,3	1,7	28	6418,2	15576,4	1,0	4,6
11	6659,9	15011,1	1,7	2,2	29	6395,6	15631,4	1,5	4,2
12	6645,1	15044,5	1,6	2,6	30	6379,6	15670,6	3,0	2,8
13	6638,0	15060,6	0,4	2,4					
14	6628,3	15082,7	4,0	3,1	31	6363,7	15711,3	2,5	2,2
15	6623,1	15094,5	1,9	2,2	32	6351,6	15739,7	0,8	1,6
16	6606,2	15133,1	1,2	2,0	36	4544	22001	1	b
17	6598,7	15150,3	1,2	1,5	37	4526	22088	1	b
18	6570,6	15215,1	6,0	3,8	38	4478	22325	3	bb
19	6564,1	15230,2	0,9	2,3	39	4461	22410	2	bb
20	6552,6	15256,9	1,1	1,8					

Cr^{III}:Al^{III} = 1:1

Lfd. Nr.	λ [Å]	ν [cm ⁻¹]	J	b_0	Lfd. Nr.	λ [Å]	ν [cm ⁻¹]	J	b_0
3	6736,6	14840,2	0,3	2,5	21	6521,9	15328,7	0,7	3,4
4	6726,4	14862,7	0,3	2,6	22	6494,6	15393,2	0,9	3,9
					23	6479,9	15428,1	0,8	2,2
6	6712,1	14894,6	4,2	1,3	24	6465,0	15463,6	4,6	3,1
7	6711,0	14896,9	3,9	0,8	25	6462,0	15470,8		
8	6696,6	14928,8	0,2	1,6	26	6442,1	15518,6	1,3	3,8
9	6685,7	14963,2	0,7	3,5	27	6437,5	15529,7	0,7	2,3
10	6671,5	14985,0	0,2	1,5	28	6417,5	15578,1	0,7	5,1
					29	6396,9	15628,3	0,9	5,0
11	6661,0	15008,6	1,0	2,2	30	6382,0	15664,7	1,2	2,6
12	6645,9	15042,7	1,4	2,2					
14	6629,5	15079,9	3,0	2,9	31	6363,3	15710,8	1,5	2,3
15	6624,6	15091,1	1,4	2,1	32	6351,8	15739,2	0,5	1,8
16	6605,6	15134,5	1,8	3,8	36	4545	21996	1	b
17	6598,9	15149,9			37	4527	22084	1	b
18	6571,3	15213,5	4,4	2,8	38	4475	22340	4	bb

Cr^{III}:Al^{III} = 1:5

Lfd. Nr.	λ [Å]	ν [cm ⁻¹]	J	b_0	Lfd. Nr.	λ [Å]	ν [cm ⁻¹]	J	b_0
4	6724,2	14867,6	0,2	2,5	11	6661,9	15008,6	1,0	1,7
					12	6646,9	15040,5	0,6	1,7
6	6712,7	14893,1	3,5	1,3	14	6630,7	15077,2	1,6	2,0
7					15	6625,1	15090,0	1,0	2,0
8	6696,9	14928,2	0,2	1,6	16	6606,2	15133,1	1,0	4,0
9	6686,2	14952,1	0,5	3,8	17	6600,4	15146,4		
10	6670,1	14988,1	0,2	1,6	18	6572,0	15211,9	2,3	1,8

Tabelle 2 (Fortsetzung)

Lfd. Nr.	λ [Å]	ν [cm $^{-1}$]	J	b_0	Lfd. Nr.	λ [Å]	ν [cm $^{-1}$]	J	b_0
21	6524,2	15323,3	0,5	5,0	29	6397,9	15625,8	0,5	5,2
22	6495,9	15390,1	0,8	3,8	30	6382,5	15663,5	0,8	2,3
23	6480,1	15427,6	0,5	2,3					
24	6465,7	15462,0	2,8	2,8	31	6363,7	15709,8	1,3	2,4
25					32	6352,1	15738,5	0,8	2,0
26	6442,5	15517,6	1,5	4,0	36	4547	21986	0,5	<i>b</i>
27	6436,9	15531,1			37	4527	22084	0,5	<i>b</i>
28	6418,4	15575,9			38	4475	22340	2,5	<i>bb</i>

Die Spektren der reinen KCr-Selenat- und Sulfatalaune zeigen am langwelligen Ende des roten Spektralbereiches zwei bzw. mehrere starke und zum Teil sehr scharfe Linien. Auf der kurzwelligen Seite dieser, als Elektronenübergänge zu deutenden Linien, folgen in den beiden Alaunen wesentlich breitere Absorptionslinien. Auf Grund der Verschiebungen, welche diese beim Übergang von H_2O zu D_2O erleiden, geht man wohl nicht fehl, wenn man sie Überlagerungen von Schwingungsstufen über den angeregten Term zuordnet. Es handelt sich dabei um Schwingungen, welche dem Gebilde $Cr(H_4O)_6^{2-}$ zugehören. Dafür spricht auch, daß die Abstände dieser Linien in den verschiedenen Cr-Alaunen nur wenig variieren. Einige schwache Linien auf der langwelligen Seite des Hauptdubletts dürften wohl gleichartigen Schwingungsüberlagerungen über dem Grundterm entsprechen.

Das allgemeine Bild, scharfes Dublett und Überlagerungslinien, besteht auch in den Mischkristallen weiter. Die Änderungen der Wellenlängen und Linienintensitäten werden unten im einzelnen besprochen.

Wie erwartet, sind die Linienverschiebungen, welche der Austausch der vom Cr^{3+} -Ion am weitesten entfernten Bausteine hervorruft, kleiner als die durch die näheren SO_4^{2-} , SeO_4^{2-} und einwertigen Radikale bedingten. Sieht man von der in Anbetracht der praktisch identischen Felder von D_2O und H_2O bewirkten Verschiebung der Hauptlinien beim Austausch H_2O gegen D_2O ab, so ist die Verschiebung SeO_4^{2-} gegen SO_4^{2-} von der Größenordnung 25 cm^{-1} , K^+ gegen NH_4^+ von

der Größenordnung 10 cm^{-1} , dagegen Cr^{+++} gegen Al^{+++} von der Größenordnung 6 cm^{-1} .

Sehr auffallend bei allen Mischkristallen, in denen Cr ausgetauscht wird, ist der Rückgang der molaren kontinuierlichen Absorption im Grünen, welche die rote Farbe bedingt. Ein Mischkristall mit $\frac{1}{10}$ Cr-Gehalt, aber der 10fachen Dicke sieht deshalb blaß aus. Offenbar sind die für das Kontinuum maßgebenden Übergänge sehr strukturempfindlich. Im Rubin (trigonal) ist die rote Farbe bei einer hundertmal kleineren Cr-Konzentration annähernd so intensiv, wie bei unverdünnten Cr-Alaunen.

Im blauen Durchlaßgebiet werden einige sehr breite Linien beobachtet, die hinsichtlich Lage und Intensität denen bei 15° K entsprechen (vgl. Kraus und Nutting l. c.).

Pulverpräparate und Spektren, die mit polarisiertem Licht und verschiedenen Kristallorientierungen aufgenommen wurden, zeigen weder Änderungen der Lage noch der Intensität der Linien. Eine Besonderheit der Mischkristalle ist eine im Polarisationsmikroskop leicht zu beobachtende Doppelbrechung, die durch innere Spannungen hervorgerufen wird.

Im einzelnen läßt sich an den Mischkristallspektren noch folgendes feststellen:

1. Austausch $\text{Cr}^{+++} \rightarrow \text{Al}^{+++}$ im KCr-Selenataulaun

Bedingt durch die größere Linienschärfe können alle Erscheinungen an den Selenataulaunen besser als an den Sulfataulaunen studiert werden.

Die wenigen auf der langwelligen Seite des „Charakteristischen Dubletts“ auftretenden Linien verändern in den Mischkristallen ihre Lage und Intensität ganz erheblich, lassen aber keine gesetzmäßigen Zusammenhänge erkennen.

Die Linien des Dubletts $R_1 = 14899,1 \text{ cm}^{-1}$ und $R_2 = 14903,3 \text{ cm}^{-1}$ erfahren eine Rotverschiebung. Die Empfindlichkeit der beiden Linien ist aber verschieden, so daß der Dublettabstand stetig gegen Null geht (Abb. 3).

Die Abhängigkeit der Linienverschiebung als Funktion der Größe $\Delta \sqrt{\frac{M}{\rho}}$ gibt ein Maximum beim Mischungsverhältnis $\text{Cr}^{+++}:\text{Al}^{+++} = 1:5$ (Abb. 4). Wie

die Abb. 3 weiter zeigt, ist dabei auch der Dublettabstand auf Null gesunken.

Die Überlagerungslinien folgen qualitativ der Verschiebung des Dubletts. Bemerkenswert ist, daß einige „Doppel-linien“, wie z. B. $\nu_1 = 15047,7 \text{ cm}^{-1}$ und $\nu_2 = 15059,0 \text{ cm}^{-1}$ (vgl. KCr-Selenataulaunspektrum in Abb. 6) ihre Abstände

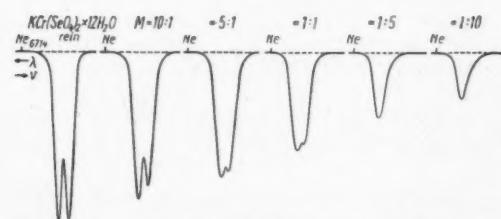


Abb. 3. Intensitätsverteilung der Linien R_1 und R_2 als Funktion von ν . M bedeutet das Verhältnis der Cr^{+++} -Ionen zu den Al^{+++} -Ionen. Neonlinie als Marke

etwas vergrößern, woraus man schließen muß, daß diese Linien keine Wiederholungen des Hauptdubletts sind. Dagegen macht sich die Schrumpfung des Abstandes der Linien R_1 und R_2 in einem Schärferwerden der Überlagerungslinien bis zu Abständen von $\sim 400 \text{ cm}^{-1}$ bemerkbar. Es ist naheliegend, diese Linien

dung
erd, ist
die die
Dicke
Über-
einer
unver-
t, die
s und
denen
Lage
ne im
innere
ellen:
n den
lets“
nsität
en.
ahren
ieden,
Null
Wie
zeigt,
der
Null
ungs-
itativ
des
swert
oppel-
 $\nu_1 =$
 $\nu_2 =$
KCr-
um in
tände
nieder-
s Ab-
linien
Linien

deshalb als nicht aufgelöste Wiederholungen des Dubletts zu deuten. Bei der Mehrzahl der weiter als 400 cm^{-1} vom Hauptdublett liegenden Linien bleibt die Linienbreite bei allen Mischkristallen unverändert.

An den Linien $\nu_2 = 15059,0 \text{ cm}^{-1}$ und $\nu_4 = 15228,6 \text{ cm}^{-1}$ tritt mit zunehmender Verdünnung eine so starke Intensitätsabnahme auf, daß sie bei $M = 1:1$ nicht mehr zu erkennen sind. Ihre Abstände von den auf der roten Seite liegenden Linien $\nu_1 = 15047,7$ und $\nu_3 = 15216,7 \text{ cm}^{-1}$ sind bei der erreichbaren Meßgenauigkeit als gleich anzusprechen. Tabelle 3 gibt diese Abstände und das Intensitätsverhältnis der „Doppellinien“ wieder. Hieraus folgt, daß den Schwingungszuständen ν_1 und ν_3 noch eine Frequenz ν_a von ~ 11 bis 16 cm^{-1} überlagert ist (siehe auch Termschema weiter unten).

Die vier sehr breiten Übergänge im blauen Spektralbereich zeigen eine Verschiebung im gleichen Sinn, aber von doppeltem Betrag, wie die roten Linien. Da sie alle gleiches Aussehen haben, vermuten Kraus und Nutting (l. c.), daß sie bereits Überlagerungslinien sind, deren zugehöriger Elektronensprung im grünen Kontinuum untergeht.

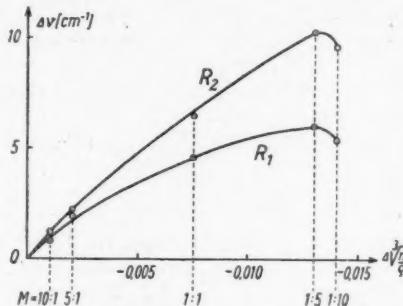


Abb. 4. Änderungen der Wellenzahlen der Linien R_1 und R_2 als Funktion von $\Delta \sqrt[3]{\frac{m}{\rho}}$. M bedeutet das Mischungsverhältnis der 3-wertigen Ionen

Tabelle 3

	$\nu_2 - \nu_1$	$\nu_4 - \nu_3$	J_1/J_2	J_3/J_4
KCr(SeO ₄) ₂ · 12 H ₂ O rein	11,3 cm ⁻¹	11,9 cm ⁻¹	1,8	1,6
Cr:Al = 10:1	15,2 cm ⁻¹	15,8 cm ⁻¹	1,8	2,0
= 5:1	16,1 cm ⁻¹	15,1 cm ⁻¹	4,0	6,7

2. Austausch Cr durch Al und Cr durch Fe im KCr-Sulfatalaun

Die am roten Ende des Spektrums liegende Liniengruppe wandert mit fortwährender Verdünnung und unabhängig von der Art der 3wertigen Ionen nach längeren Wellen (vgl. KCr-Sulfatalaunspektren in Abb. 6). Die intensive Linie 14926,3 cm⁻¹ stellt das nicht aufgelöste, bei 20° K jedoch trennbare Dublett R_1R_2 dar. Das Verhalten der Linie 14862,0 cm⁻¹ bei 20° K spricht dafür, daß es sich ebenfalls noch um einen reinen Elektronensprung handelt. Die sehr intensive und relativ scharfe Linie 14901,8 kommt von einem über dem Grundterm gelegenen Schwingungsniveau, da ihre Intensität bei der Temperatur des flüssigen Wasserstoffs fast auf Null absinkt und das $\Delta\nu$ von 25 cm⁻¹ von der auch sonst bei Schwingungsniveaus beobachteten Größenordnung ist. Für die weiteren vier sehr schwachen aber scharfen Linien (Halbwertsbreite < 1 Å) beiderseits der Hauptlinie fehlt noch eine befriedigende Erklärung. Auf Grund der Linienbreite müßte man sie ebenfalls als Elektronenübergänge deuten. In den Registrierkurven (siehe Abb. 5 oberste Kurve) erscheinen sie nur als kleine Ansätze im Intensitäts-

verlauf der Hauptlinie. Wenn sie auch bei 20°K schärfer werden, so reicht dies immer noch nicht aus, um den Zeeman-Effekt zur Entscheidung heranziehen zu können. Die naheliegende Erklärung, daß es sich hier um ein durch die Abweichung von der kubischen Symmetrie bedingtes kompliziertes Aufspaltungsbild handelt, scheidet auf Grund der Beobachtungen an den K/NH_4 -Mischkristallen aus. Die Hauptlinie verschiebt sich dabei ganz erheblich, während die fraglichen Linien praktisch stehen bleiben. Die wahrscheinlichste Deutung ist die, daß das Van Vleck'sche Niveau 4F_5 , das in die Nachbarschaft von 3F_3 fallen sollte, tatsächlich ganz eng bei 3F_3 liegt, wobei die Übergänge erst durch die, auch aus anderen Gründen bei den Sulfatalaunen anzunehmende Abweichung vom rein kubischen Kristallfeld ermöglicht werden.

Beim Austausch Cr gegen Fe erfährt diese Hauptgruppe bei $M = 1:10$ eine Rotverschiebung von $\sim 5 \text{ cm}^{-1}$. Die gegenseitigen Abstände der Linien bleiben im wesentlichen erhalten. Erstaunlicherweise nimmt die Schärfe der Elektronenübergänge mit steigendem Fe-Gehalt im Mischkristall etwas zu. Während die Intensität des reinen Elektronensprungs bei $M = 1:1$ ein Maximum hat, fällt die Intensität der Überlagerungslinien gering, aber monoton ab. Im Überlagerungsspektrum zeigt außerdem die Linie $15047,9 \text{ cm}^{-1}$ größere, die Linie $15168,0 \text{ cm}^{-1}$ sogar entgegengesetzte Verkürzungen, als die Hauptlinie.

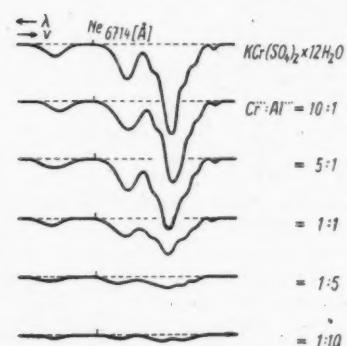


Abb. 5. Verschiebung und Intensitätsänderung des Elektronenübergangs und seiner Begleitlinien bei Austausch $\text{Cr} \rightarrow \text{Al}$ im KCr -Sulfatalaun

allerdings so klein, daß sie visuell noch kaum bemerkbar ist. Die Intensität der Überlagerungslinien ist bei $M = 1:5$ praktisch auf Null abgesunken. Mit zunehmendem Al-Gehalt in den Mischkristallen werden auch sie breiter.

Im blauen Spektralbereich treten zwei sehr breite und verwaschene Absorptionslinien auf. Die Halbwertsbreite beträgt $\sim 20 \text{ Å}$. Mit steigendem Al-Gehalt wird ihre Intensität ebenfalls geringer.

3. Austausch von SeO_4^{2-} durch SO_4^{2-} im KCr -Alaun

Der isomorphe Austausch von SeO_4^{2-} durch SO_4^{2-} im Verhältnis 1:1 liefert ein eigenartiges Spektrum (Abb. 6). Die Elektronenübergänge des Mischkristallspektrums lassen sich leicht den entsprechenden Linien des KCr -Sulfatalauns zuordnen, während die Überlagerungslinien mehr den Charakter der entsprechenden Selenatlinien mit den Doppellinien bei 15100 cm^{-1} und 15300 cm^{-1} besitzen.

Das Hauptdublett erfährt eine starke Blauverschiebung und ist im Mischkristall sehr diffus. Diese letzte Tatsache bedingt auch, daß die Linie $14929,6 \text{ cm}^{-1}$ nicht in die im reinen Sulfatalaun auftretenden Übergänge aufgelöst werden kann.

4. Austausch von K^+ durch NH_4^+ im Cr-Sulfatalaun

In den Mischkristallspektren finden die stärksten Veränderungen an den Elektronenübergängen statt. Die Hauptlinie mit dem nicht getrennten Dublett rückt um $10,6 \text{ cm}^{-1}$ nach kürzeren Wellen und spaltet auch im reinen $\text{NH}_4\text{Cr}(\text{SO}_4)_2 \cdot 12 \text{ H}_2\text{O}$ nicht auf. Wie oben schon erwähnt, bleiben die sehr scharfen und mit geringer Intensität auftretenden Linien beiderseits R_1/R_2 wie eine Kulisse unverändert stehen. Dabei zeigt sich, daß unter der Hauptlinie noch eine schwache ebenfalls scharfe Linie liegt, aus der mit zunehmenden NH_4^+ -Ionen im Misch-

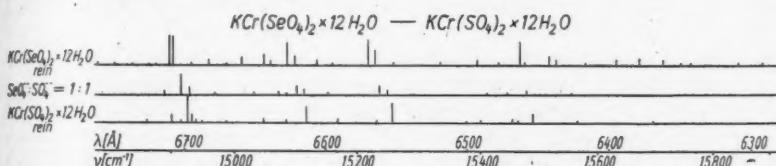


Abb. 6. Spektren von Selenat-Sulfatmischalaunen

kristall die Linie $14927,1 \text{ cm}^{-1}$ des Ammonium-Chrom-Sulfatalauns herauswächst. Durch diese und die das Dublett R_1R_2 repräsentierende Linie $14936,9 \text{ cm}^{-1}$ werden die im KCr-Sulfatalaun auftretenden schwachen Linien (siehe Abschnitt 2) mit Ausnahme der Linie $14916,8 \text{ cm}^{-1}$ verdeckt.

Die Linienbreite steigt im ganzen Spektrum bis $M = 1:1$ sehr schnell an und bleibt dann annähernd konstant. Dies ist durch die Tatsache bedingt, daß die Linien im reinen NH_4Cr -Sulfatalaun erheblich breiter sind, als im KCr-Sulfatalaun.

Im wesentlichen folgen die Überlagerungslinien der Blauverschiebung des Elektronenübergangs. Die Frequenzabstände zu diesem verändern sich stetig zu denen des NH_4Cr -Sulfatalauns. Eine Ausnahme machen die beiden schwachen Linien bei rund 15100 cm^{-1} , die immer mehr zusammenrücken, verschwachen werden und im reinen NH_4Cr -Sulfatalaun schließlich im Untergrund verschwinden. Eine schon in der Abschattierung der Linie $15490,5 \text{ cm}^{-1}$ erkennbare Komponente spaltet in die annähernd gleich intensiven Linien $15489,5 \text{ cm}^{-1}$ und $15500,8 \text{ cm}^{-1}$ auf.

5. Gleichzeitiger Austausch von K , Cr durch NH_4 , Al und K , Cr durch NH_4 , Fe

Als erstes wird man die Frage stellen, ob sich die Verschiebungen, die der Austausch von nur einem Gitterbaustein hervorruft, in den ternären Mischkristallen einfach addieren. Wie das folgende Beispiel zeigt, ist dies wenigstens dem Vorzeichen nach erfüllt. Bei $M = 1:10$ gibt der Austausch für die Hauptlinien:

K^+ durch NH_4^+ ein $\Delta\nu$ von $+9,2 \text{ cm}^{-1}$

Cr^{+++} durch Al^{+++} ein $\Delta\nu$ von $-6,1 \text{ cm}^{-1}$

K^+ , Cr^{+++} durch NH_4^+ , Al^{+++} $\Delta\nu$ von $+8,1 \text{ cm}^{-1}$ (statt $+3,1 \text{ cm}^{-1}$).

Für die auftretende erhebliche Linienverbreiterung kann wohl in der Hauptsache das stark verbreiternd wirkende NH_4^+ -Ion verantwortlich gemacht werden. Die noch etwas stärkere Zunahme als beim Austausch $\text{K} \rightarrow \text{NH}_4$ ist durch die größere Unordnung im Gitter bei gleichzeitigem Ersatz von 2 Ionen bedingt.

6. Fluoreszenz

Die Bestrahlung der durch Beimischung von farblosen Fe- und Al-Ionen entstandenen Chromalaun-Mischkristalle mit UV-Licht ergab nicht die geringsten Anzeichen einer Fluoreszenz.

VI. Diskussion

Die Mischkristalle wurden in ihrer Dicke so variiert, daß stets annähernd gleichviel Cr-Ionen in der durchstrahlten Schicht vorhanden waren. Da trotzdem eine Abnahme der Linienintensitäten stattfindet, muß sich in den Mischkristallen die Oszillatorenstärke der Cr⁺⁺⁺-Ionen verkleinert haben.

Für die in den Cr-Alaunen auftretenden Elektronenübergänge ist in erster Linie der zweifache angeregte Term verantwortlich, dessen Aufspaltung allerdings so gering sein kann, daß eine Auflösung nicht mehr möglich ist. Der Grundzustand ist einfach, wenn man von der 0,1 bis 0,2 cm⁻¹ betragenden magnetischen Aufspaltung absieht. Sie läßt sich mit cm-Wellen¹²⁾ sehr genau bestimmen, ist aber schon früher im Spektrum des Rubin optisch nachgewiesen worden¹³⁾. Das magnetische Verhalten und der Verlauf der Suszeptibilität in Abhängigkeit von der Temperatur machen es wahrscheinlich, daß innerhalb von 200 cm⁻¹ über dem Grundterm kein angeregtes Niveau liegt¹⁴⁾. Es bleibt deshalb für die Deutung der in manchen Spektren enthaltenen 6 Elektronenübergänge nur die Möglichkeit, noch den von Finkelstein und Van Vleck¹⁵⁾ bestimmten $4F_5$ -Term zu verwenden. Dies gibt auch eine befriedigende Erklärung, warum sich beim Austausch K durch NH_4 das nicht aufgelöste Dublett R_1R_2 des Sulfatalauns völlig anders verhält als die 4 scharfen Begleitlinien.

Von einer Änderung der magnetischen Kopplung beim Austausch des Cr-Ions (3,87 effektive Bohrsche Magnetonen) einerseits durch das stärker paramagnetische Fe⁺⁺⁺-Ion (5,87 effektive Bohrsche Magnetonen) in Gestalt einer verminderten (Al⁺⁺⁺-Ion) bzw. vergrößerten Linienbreite (Fe⁺⁺⁺-Ion) ist nichts zu merken. Die Linienbreite wird bei Zugabe von Eisenalaun sogar etwas kleiner als bei Aluminialaun. Offenbar ist die durch die magnetische Kopplung bedingte Breite in den Cr-Alaunen so klein, daß sie durch andere Effekte verdeckt wird.

Das nicht aufgelöste Dublett R_1R_2 wird durch die Zugabe von Al⁺⁺⁺-Ionen nach derselben Seite verschoben, wie durch die Fe⁺⁺⁺-Ionen, obwohl die Änderung von $\Delta \sqrt{\frac{m}{q}}$ verschiedenes Vorzeichen hat. Die Überlagerungslinien folgen vorzeichenmäßig nicht immer den Verschiebungen der Hauptlinien.

Die Deutung der Überlagerungslinien in den Alaunspektren ist so, daß die kurzwelligen Komponenten die Niveaustände des angeregten, die langwelligen die des Grundterms darstellen. Wenn, wie es bei den Seltenerden der Fall ist, die Schwingungen von Gebilden herrühren, an denen das S. E.-Ion ganz unbeteiligt ist, müssen diese Abstände für beide Terme gleich sein. Im hier vorliegenden Fall ist anzunehmen, daß die Überlagerungslinien in der Hauptsache den Schwingungen des Komplexes $Cr(H_2O)_6^{++}$ zugehören. In diesem Fall ist ein Einfluß der Anregung auf die Schwingungsfrequenz zu erwarten. Die Änderungen

¹²⁾ B. Bleaney, Physic. Rev. **75**, 1962 (1949).

¹³⁾ O. Deutschbein, G. Joos, J. Teltow, Naturwiss. **30**, 228 (1942).

¹⁴⁾ de Haas, Goster und van den Handel, Proc. Acad. Sci. Amsterdam **33**, 676 (1930); **36**, 158 (1933).

sind allerdings so gering, daß man die Schwingungsstufen der beiden Terme noch einander zuordnen kann. In manchen Fällen unterscheiden sie sich nur durch eine additive Konstante, wie das folgende Beispiel zeigt (Tabelle 4). Es sind die von Sauer⁷⁾ gemessenen Werte des RbCr-Selenatalauns verwendet worden, da bei höheren Temperaturen infolge des Rückgangs der kontinuierlichen Absorption am langwelligen Ende des Spektrums die dem Grundterm überlagerten intensiveren Schwingungsstufen beobachtet werden können. Für die auf der langwelligen Seite des KCr-Selenatalauns bei der Temperatur des flüssigen Sauerstoff beobachteten Linien gelten dieselben Zusammenhänge.

Tabelle 4
Wellenzahlen des RbCr-Selenatalauns bei 195° K

	ν [cm ⁻¹]	Abstand von der Hauptlinie	Intensität	Intensitätsverhältnis
Elektronensprung $R_1 R_2 \rightarrow$	14579	327	0,5	
	14706	200	1,0	
	14793	113	0,5	
	14853	53	1,5	
	14906	15 16 0 2 4	5,0	
	14957	51	1,5	
	15015	109	1,0	
	15090	184	10	
	15218	312	6,3	
				1:2
				1:3
				1:3/2
				~1:2

Wellenzahlen des RbCr-Selenatalauns bei 291° K

	ν [cm ⁻¹]	Abstand von der Hauptlinie	Intensität	Intensitätsverhältnis
Elektronensprung	14565	321	0,5	
	14693	193	1,0	
	14886	13 0 13	—	
	15066	180	10	
	15194	308	6	
				1:2
				~1:2

Unter Benutzung dieser Feststellungen und der Tatsache, daß bei den Mischkristallen KCr(Al)-Selenatalaun die Überlagerungslinien der Schrumpfung des Dublettabstandes folgen, in dem diese mit wachsendem Al-Gehalt schärfer werden, läßt sich folgendes experimentell einwandfrei begründetes Niveauschema aufstellen (Abb. 7). In diesem Schema können nur einige wenige Überlagerungslinien mit einem Abstand > 400 cm⁻¹ von der Hauptlinie, die gegen diese Änderungen indifferent sind, keinen Platz finden. Die ersten 4 Schwingungsstufen im Grund- und angeregten Term lassen sich einander zuordnen. Mit einigen Gitterschwingungen kombinieren noch die äußerst langwelligen Gitterschwingungen $\nu_a = 11,5$ cm⁻¹ und $\nu_b = 11,5$ cm⁻¹. Zwischen beiden wurde unterschieden, da die Intensität von ν_a mit der Verdünnung gegen Null geht, während ν_b seine Intensität relativ zur benachbarten Linie behält.

Die stetige Änderung des Dublettabstandes mit steigendem Al⁺⁺-Gehalt im Selenatalaun ist insofern bemerkenswert, als die Dublettstruktur in der von Kraus und Nutting⁸⁾ vorgenommenen Klassifikation der Alaune für die Gruppe 1 charakteristisch ist, während Gruppe 2 durch eine einfache, auch bei 20° K nicht

aufgelöste Linie an Stelle des Dubletts gekennzeichnet ist. Da im trigonalen Rubin eine weite Dublettaufspaltung vorliegt, kann als wahrscheinliche Deutung angenommen werden, daß der Abstand $R_1 R_2$ durch die Abweichung des Umgebungsfeldes des Cr⁺⁺⁺-Ions von der kubischen Symmetrie bedingt ist und das durch den Zusatz von Al⁺⁺⁺-Ionen stetig verändert wird. Die auftretenden Verschiebungen sind für die Linien R_1 und R_2 verschieden groß. Die Richtung geht dabei solange

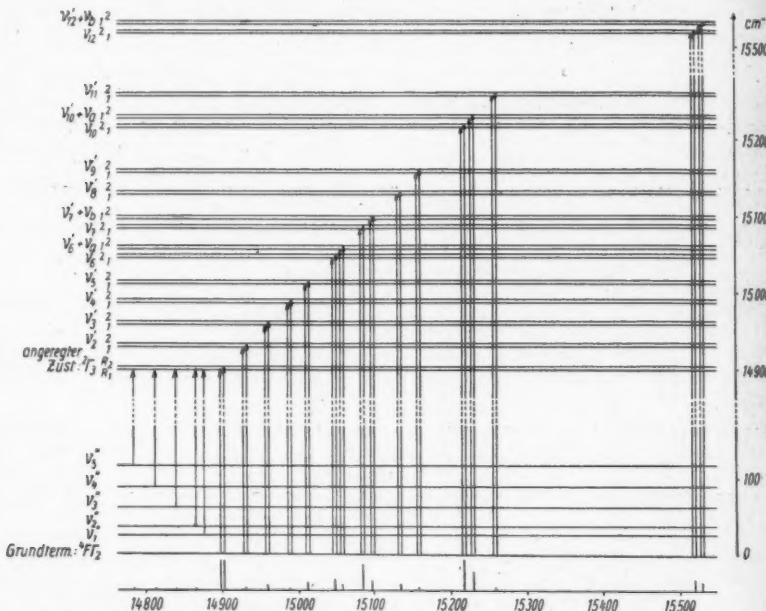


Abb. 7. Termschema des KCr-Selenatalauns. Es bedeutet $\nu_n'' = \nu_n' + \Delta\nu$; ($n = 1, 2, \dots$). Der Betrag von $\Delta\nu$ hängt von der Temperatur und der Höhe des Schwingungsniveaus ab (siehe Tabelle 3). Die durch die Überlagerungen der Schwingungsniveaus über den angeregten Zustand entstehenden Terme sind genau wie dieser doppelt. Im Spektrum wird diese Aufspaltung durch die thermische Verbreiterung der Linien verdeckt

nach langen Wellen, bis die Linien nicht mehr getrennt werden können. Auffällig ist aber, daß dort, wo der Dublettabstand gegen „Null“ geht, eine rückläufige Bewegung einsetzt. Wie der Gang des Ausdrückes $\Delta \sqrt{\frac{m}{q}}$ zeigt, nimmt die Gitterkonstante monoton ab und kann deshalb nicht für die Umkehr verantwortlich gemacht werden.

Die Unterschiede im Aussehen der Überlagerungsspektren von Selenat- und Sulfat-Chromalaunen beruhen in der Hauptsache auf dem Fehlen der Frequenzen ν_a und ν_b in den letzteren. Wie außerdem die K(NH₄)Cr-Sulfatalaune zeigen, können einzelne Linien so stark verbreitert werden, daß sie im Kontinuum verschwinden.

Ein unmittelbares Bild von der Feldwirkung der verschiedenen Ionen würde man dann erhalten, wenn beim partiellen Ersatz einzelner Ionen die Mittelpunkte aller Ionen an ihren ursprünglichen Plätzen bleiben. Tatsächlich kommt aber noch ein indirekter Einfluß dadurch zustande, daß beim Austausch auch die Abstände der dem Cr-Ion näher gelegenen Bausteine etwas verändert werden. Auf Grund der röntgenographischen Untersuchungen kann dieser Effekt als verhältnismäßig klein angesehen werden.

Durch den teilweisen Ersatz der Bausteine in der Umgebung eines Cr-Ions erwartet man eine größere Linienbreite in den Mischkristallspektren. Als Extremwert für die Verbreiterung liegt es nahe, die entstehende Linienverschiebung von der Beimischung 0 bis zu $M = 1:1$ zu benützen. Diese Änderung ist aber von der Größenordnung der thermisch bedingten Linienbreite, so daß von einem Einfluß auf die Schärfe beim Austausch der 3wertigen Ionen nicht sehr viel zu merken ist. Der Austausch K durch NH_4 und SO_4^{2-} durch SeO_4^{2-} , der zu größeren Wellenzahländerungen führt, bedingt dagegen eine sehr erhebliche Verbreiterung, die bei einem Mischungsverhältnis $M = 1:1$ ein Maximum hat. Geordnete Mischphasen ließen sich nicht beobachten.

Herrn Professor Dr. G. Joos bin ich für die Anregung dieser Arbeit, seiner fördernden Mithilfe und die Bereitstellung der Institutsmittel sehr zu Dank verpflichtet. In experimentellen Fragen ist mir Herr Professor Dr. E. v. Angerer stets in der freundlichsten Weise mit Rat zur Seite gestanden. Für die leihweise Überlassung eines Anderson-Plangitters möchte ich Herrn Baron Dr. v. Hirsch sehr danken.

München, Physikalisches Institut der Technischen Hochschule.

(Bei der Redaktion eingegangen am 22. März 1951.)

Zur Theorie des gegabelten Verdichtungsstoßes¹⁾

Von W. Kofink

(Mit 2 Abbildungen)

Inhaltsübersicht

Die experimentelle und theoretische Seite der in stationären Überschallströmungen auftretenden gegabelten Verdichtungsstoße wurde von A. Weise²⁾ im wesentlichen erschöpfend behandelt. Er formulierte die für diese Erscheinung notwendigen zwei Bedingungen, nämlich die der Richtungs- und Druckgleichheit hinter dem Hauptstoß und dem zweiten Nebenstoß: die algebraische Summe der Ablenkungswinkel δ_a und δ_b in den beiden Nebenstößen muß gleich dem Ablenkungswinkel δ der Strömung im Hauptstoß sein und das Produkt der Druckverhältnisse Π_a und Π_b an den Nebenstößen muß gleich dem Druckverhältnis Π am Hauptstoß sein, d. h.

$$\delta = \delta_a + \delta_b \quad (1)$$

$$\Pi = \Pi_a \cdot \Pi_b. \quad (2)$$

Seine Herzkurvenmethode gestattet im Rahmen der Zeichengenauigkeit ein schnelles Auffinden näherer Lösungen dieser beiden Gleichungen, die man durch numerische Rechnungen mit (1) und (2) in exakte Lösungen verwandeln kann. Andere Autoren³⁾ sind teilweise unter Erweiterung dieser Methode im wesentlichen denselben Weg gegangen. Fr. Wecken hat zudem topologische Betrachtungen angestellt und die numerischen Ergebnisse vervollständigt. Wegen des hohen Grads der algebraischen Gleichung, die aus den Bedingungen (1) und (2) für eine geeignete, alles übrige bestimmende Unbekannte hergeleitet werden kann, hat man jedoch zumindest in der deutschen Literatur bisher auf eine rein algebraische Behandlung dieses Gegenstandes verzichtet. In den USA wurde zur Lösung ähnlicher, zum Teil algebraisch noch komplizierterer Probleme⁴⁾ die Eniak angewandt. Da bei uns so weit entwickelte Rechenmaschinen fehlen, so liegt hier ein besonderes Interesse vor, den Grad der Gleichung dieses Problems möglichst zu reduzieren.

Im folgenden wird gezeigt, daß das Problem des gegabelten Verdichtungsstoßes bei gleicher Anströmgeschwindigkeit und konstantem Verhältnis der spezifischen Wärmen γ vor dem Hauptstoß und dem vorderen Nebenstoß auf eine

¹⁾ Herr Professor Dr. E. Madelung zum 70. Geburtstag gewidmet.

²⁾ A. Weise, Techn. Ber. 10, 59 (1943); Jahrb. der deutsch. Luftfahrtforsch. 1943, II AO 11; Festschrift zum 70. Geburtstag von L. Prandtl 1945.

³⁾ H. Eggink, FB 1850 (1943). W. Wuest, Ber. Aerodyn. Versuchsanstalt Göttingen 104 (1946); ZAMM 1948, 73; Fr. Wecken, ZAMM 1949, S. 147.

⁴⁾ A. H. Taub, Physic. Rev. 72, 51 (1947); W. Bleakney u. A. H. Taub, Rev. Mod. Physics 21, 584 (1949). Weitere, uns bisher unzugängliche Literatur aus der Kriegszeit findet man zitiert in R. Courant u. K. O. Friedrichs, Supersonic flow and shock waves 1948.

algebraische Gleichung 6. Grads führt. Die Koeffizienten dieser Gleichung, die von drei gegebenen Variablen k, l, m abhängen, werden hergeleitet. k, l, m sind durch die Gasart, die Größe der dimensionslosen Anströmgeschwindigkeit und die Richtung des Hauptstoßes bestimmt. Die Unbekannte x hängt in gleicher Weise mit der Richtung des vorderen Nebenstoßes zusammen, wie m mit der des Hauptstoßes. Für einige Sonderfälle ergeben sich aus dieser Gleichung 6. Grads Gleichungen 1. bis 4. Grads, deren Lösungen als bequeme Ausgangspunkte für numerische Rechnungen im Allgemeinfall dienen können.

§ 1. Bezeichnungen und Formelsammlung

a) Die Gasart, in welcher der Gabelstoß auftritt, wird beschrieben durch $k = (\varkappa - 1)/(\varkappa + 1)$, wobei $\varkappa = c_p/c_v$ das Verhältnis der spezifischen Wärmen bei konstantem Druck bzw. Volumen bedeutet. Die Anströmgeschwindigkeit w_1 , durch Division mit der kritischen Schallgeschwindigkeit a^* dimensionslos gemacht, also $\omega_1 = w_1/a^*$, bestimmt die Variable

$$l = \operatorname{ctg}^2 \alpha = M^2 - 1 = \frac{\omega_1^2 - 1}{1 - k \omega_1^2} \quad \text{bzw. } \omega_1^2 = \frac{1 + l}{1 + k l}. \quad (3)$$

Dabei ist α der Machsche Winkel, $M = 1/\sin \alpha$ die Machsche Zahl der Anströmung. Die Variablen m und x hängen in gleicher Weise von den dimensionslosen Normalengeschwindigkeiten ω_{n_1} vor dem Hauptstoß bzw. $\omega_{n_{1a}}$ vor dem vorderen Nebenstoß ab:

$$m = \frac{\omega_{n_1}^2 - 1}{1 - k \omega_{n_1}^2} \quad \text{bzw. } x = \frac{\omega_{n_{1a}}^2 - 1}{1 - k \omega_{n_{1a}}^2}. \quad (4)$$

ω_{n_1} bzw. $\omega_{n_{1a}}$ entstehen wie üblich aus den Normalengeschwindigkeiten w_{n_1} bzw. $w_{n_{1a}}$ durch Division mit den zugehörigen kritischen Normalengeschwindigkeiten a_n^* bzw. $a_{n_a}^*$. Man berechnet sie bekanntlich aus

$$(a_n^*)^2 = (a^*)^2 - k(w_1^2 - w_{n_1}^2) = (a^*)^2 - k w_1^2 \cos^2 \vartheta_1 \quad \text{und}$$

$$(a_{n_a}^*)^2 = (a^*)^2 - k(w_1^2 - w_{n_{1a}}^2) = (a^*)^2 - k w_1^2 \cos^2 \vartheta_{1a},$$

wobei ϑ_1 bzw. ϑ_{1a} die Neigungswinkel des Haupt- bzw. des vorderen Nebenstoßes gegen die Anströmrichtung bedeuten.

b) Durch Vorgabe von l und m werden die Anströmgeschwindigkeit und alle den Hauptstoß betreffenden dimensionslosen Größen gegeben: das Druckverhältnis $\Pi = p_2/p_1$ am Hauptstoß ist $\Pi = 1 + (1 + k)m$, die Winkel ϑ_1 bzw. ϑ_2 zwischen Hauptstoß und Anström- bzw. Abströmrichtung sind $\operatorname{tg}^2 \vartheta_1 = (1 + m)/(l - m)$ bzw. $\operatorname{tg}^2 \vartheta_2 = (1 + km)^2/[(1 + m) \cdot (l - m)]$, der Ablenkungswinkel der

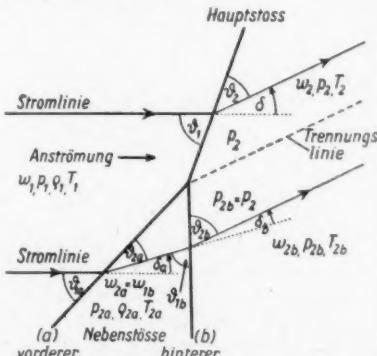


Abb. 1. Bezeichnungen am gegabelten Verdichtungsstoß

Strömung ist $\operatorname{tg}^2 \delta = (1 - k)^2 m^2 (l - m) / \{(1 + m) [1 + l - (1 - k) m]^2\}$, die dimensionslose Abströmgeschwindigkeit $\omega_2 = w_2/a^*$ hinter dem Hauptstoß folgt aus $\omega_2^2 = [(l - m) (1 + m) + (1 + k m)^2] / [(1 + k l) (1 + m)]$, das Verhältnis der Dichten $\rho_2/\rho_1 = \omega_2^2 = \operatorname{tg} \vartheta_1 / \operatorname{tg} \vartheta_2 = (1 + m) / (1 + k m)$ und $T_2/T_1 = (1 + k m) \cdot [1 + (1 + k) m] / (1 + m)$, das Verhältnis der kritischen Geschwindigkeiten $a_n^*/a^* = \sqrt{(1 + k m) / (1 + k l)}$, das Drosselverhältnis $D = p_0'/p_0$ als Verhältnis der zugehörigen „Kesseldrücke“ p_0' nach dem Hauptstoß bzw. p_0 vor dem Hauptstoß, aus denen die betreffenden Strömungen isentrop hervorgehen könnten, ist

$$D = \left\{ [(1 + m) / (1 + k m)]^{\frac{1+k}{2k}} \right\} : [1 + (1 + k) m]^{\frac{1-k}{2k}}. \quad \text{Mit } D \text{ hängt die Entropiezunahme } \Delta s \text{ der Strömung im Hauptstoß zusammen, sie ist } \Delta s = -A R \ln D \text{ (Cal/kg Grad), wobei } A \text{ (Cal/mkg) das Wärmeäquivalent und } R \text{ (m/Grad) die Gaskonstante bedeuten.}$$

c) Für den vorderen Nebenstoß (Index a) gelten dieselben Formeln, wenn man m durch x ersetzt, jedoch l beibehält, da er mit derselben Geschwindigkeit angeströmt werden soll, und die linken Seiten aller Gleichungen mit einem Index a versieht. Jedes x , das eine Wurzel der Gl. (14) des § 2 ist und die Nebenbedingung $0 \leq x \leq m \leq l$ erfüllt, ergibt einen physikalisch möglichen vorderen Nebenstoß. Die Bedingung, daß die Strömungsgeschwindigkeit zwischen vorderem und hinterem Nebenstoß mindestens gleich der kritischen Schallgeschwindigkeit sein muß, d. h. $\omega_{aa}^2 = \omega_{1b}^2 \geq 1$, verlangt außerdem, daß $x \leq [l - 2 + \sqrt{l^2 + 4 k l + 4}] / 2(1 + k)$ ist; aus $l' \geq 0$ in Gl. (7).

d) Um die Formeln für den hinteren Nebenstoß zur Anwendung zu bringen (Index b), benutzt man die Gabelbedingung (2). Definiert man x' als Funktion der dimensionslosen Normalengeschwindigkeit $\omega_{n1b} = w_{n1b}/a_{n1b}^*$ vor dem hinteren Nebenstoß analog zu x als Funktion von ω_{n1a} , also $x' = (\omega_{n1b}^2 - 1) / (1 - k \omega_{n1b}^2)$, so lautet die Gabelbedingung (2) in den Variablen m, x, x'

$$1 + (1 + k) m = [1 + (1 + k) x] [1 + (1 + k) x']. \quad (5)$$

Daraus folgt

$$x' = \frac{m - x}{1 + (1 + k) x}. \quad (6)$$

Die zu l analoge Größe l' für das Strömungsfeld zwischen vorderem und hinterem Nebenstoß ist $l' = (\omega_{aa}^2 - 1) / (1 - k \omega_{aa}^2)$, da $\omega_{1b}^2 = \omega_{aa}^2$ ist. Führt man darin ω_{aa}^2 als Funktion von x ein, das man aus der Formel für ω_2^2 im Absatz b durch Ersetzen von m durch x gewinnt, so erhält man

$$l' = \frac{l + (l - 2) x - (1 + k) x^2}{(1 + k x) [1 + (1 + k) x]}. \quad (7)$$

Die Formeln des Absatzes b) für den Hauptstoß gehen nun in die analogen für den hinteren Nebenstoß über, wenn man in ihnen l durch l' und m durch x' ersetzt und an den Größen der linken Seite aller Gleichungen den Index b hinzufügt.

Bei Vorgabe von k, l, m konzentriert sich also das ganze Interesse auf die Bestimmung der Unbekannten $x = M_{n1}^2 - 1$. Im nächsten Paragraphen wird für sie eine algebraische Gleichung 6. Grades aufgestellt. Mit gleichem Erfolg könnte man statt x jede mit ihr gebrochen linear zusammenhängende Größe, z. B. ω_{n1b}^2 als Unbekannte wählen ohne den Grad der Gleichung zu verändern. l, m und x haben jedoch die besondere Eigenschaft, im Überschallbereich $1 \leq \omega_1 \leq \omega_{\max}$

in den Grenzen $0 \leq x, m, l \leq \infty$ zu variieren. Dies ist ein Vorteil bei der Betrachtung des Grenzfallen $\omega \rightarrow \omega_{\max}$ und bei der Suche nach gemeinsamen Faktoren in den Koeffizienten der Gleichung.

§ 2. Herleitung der Gleichung

Um die Gabelbedingung (1) in eine algebraische Gleichung zwischen den Größen k, l, m und x mit rationalen Koeffizienten zu verwandeln, muß man eine Gleichung zwischen den Quadraten der trigonometrischen Funktionen der Ablenkungswinkel $\delta, \delta_a, \delta_b$ aufstellen, da erst sie rationale Ausdrücke in k, l, m und x sind. Eine solche Gleichung ist z. B.

$$(\sin^2 \delta - \sin^2 \delta_a - \sin^2 \delta_b)^2 = 4 \cos^2 \delta \sin^2 \delta_a \sin^2 \delta_b. \quad (8)$$

Man erhält sie aus $\cos \delta = \cos(\delta_a + \delta_b)$ durch Multiplikation mit $2 \sin \delta_a \sin \delta_b$ und Quadrieren. Für die in (8) vorkommenden Glieder gilt

$$\sin^2 \delta_a = \frac{(1-k)^2 x^2 (l-x)}{(1+l) N(x)}, \quad \sin^2 \delta_b = \frac{(1-k)^2 (x-m)^2 A(x)}{N(x) B(x)}, \quad (9)$$

$$\sin^2 \delta - \sin^2 \delta_a = \frac{(1-k)^2 (x-m) C(x)}{(1+l) b_0 N(x)}, \quad \cos^2 \delta = \frac{(1+m)[1+l-(1-k)m]^2}{(1+l) b_0}$$

mit $A(x) = (1+kx)[(1+x)(l-x)-m(1+kx)],$

$$B(x) = b_2 x^2 + [(1+k) b_0 - m b_2] x + b_0,$$

$$C(x) = b_0 x^2 - (l-m)[b_0 + (1-k^2)m^2] x - m(l-m)(1+l),$$

$$N(x) = (1+x)(l-x) + (1+kx)^2, \quad b_0 = (1+m)(l-m) + (1+k)m^2,$$

$$b_2 = k(l+1) - (1-k^2)m. \quad (10)$$

Da $\sin^2 \delta_b$ den Faktor $(x-m)^2$ und $\sin^2 \delta - \sin^2 \delta_a$ den Faktor $x-m$ enthält, so hebt sich nach Einsetzen der Ausdrücke (9) in (8) die triviale Doppelwurzel $x=m$ heraus und man hat nach Beseitigung der Nenner eine Gleichung 8. Grads:

$$[B(x)C(x) - (1+l)b_0(x-m)A(x)]^2 = 4(1+m)[1+l-(1-k)m]^2 b_0 x^2 (l-x) A(x) B(x). \quad (11)$$

Sie läßt sich auf eine Gleichung 6. Grads reduzieren, da sie beiderseits den Faktor x^2 enthält, denn das Absolutglied in der linken Klammer verschwindet. Stellt man noch $A(x)$ als Polynom in x dar:

$$A(x) = -kx^3 - a_2 x^2 + a_1 x + (l-m) \quad (12)$$

$$\text{mit } a_2 = 1 + k - k l + k^2 m \quad \text{und } a_1 = -1 + (1+k) l - 2 k m,$$

so läßt sich das Absolutglied in der Klammer beseitigen und man erhält eine Gleichung 6. Grads in x :

$$\begin{aligned} & \{[b_2 x + (1+k) b_0 - m b_2] [b_0 x^2 - (l-m)(b_0 + (1-k^2)m^2)x - m(l-m)(1+l)] \\ & + [b_2 x^2 + ((1+k) b_0 - m b_2)x + b_0] [b_0 x - (l-m)(b_0 + (1-k^2)m^2)] \\ & - (1+l) b_0 [A(x) + m(kx^2 + a_2 x - a_1)]\}^2 \\ & = 4(1+m)[1+l-(1-k)m]^2 b_0 (l-x) A(x) B(x). \end{aligned} \quad (13)$$

Diese Gleichung ist, wenn man sie nach Potenzen von x ordnet, in der geeignetesten Form, um numerische Rechnungen auszuführen. Aber vom mathematischen Standpunkt hat sie noch nicht die einfachste Gestalt, denn die 7 Koeffizienten der Potenzen x^6 bis x^0 enthalten noch den gemeinsamen Faktor m^2 . Die Entfernung dieses

gemeinschaftlichen Teilers erfordert zwar einfache, aber langwierige Rechnungen. Ihr Ergebnis ist folgende Gleichung 6. Grads in x mit Koeffizienten A_n ohne gemeinschaftlichen rationalen Teiler:

$$\sum_{n=0}^6 A_n x^n = 0. \quad (14)$$

Die A_n sind Polynome in den gegebenen Variablen k, l, m :

$$\begin{aligned} A_0 &= (1-k)^2 b_0 f_0, \quad A_5 = 2(1-k) b_0 [(1-k)(1+l)(1+k)l] f_1 + f_0 f_1 \\ \text{mit } f_0 &= (1+k)^2 b_0 + 4k(l-m)b_2, \quad f_1 = 1+k+2kl-k(1-k)m \\ f_2 &= -k+(-2+k)l+k(1-k)m, \quad \text{und } b_0, b_2 \text{ aus den Gl. (10)} \\ A_4 &= \sum_{r=0}^6 a_{4r} m^r, \quad A_3 = 2 \sum_{r=0}^6 a_{3r} m^r, \quad A_2 = \sum_{r=0}^6 a_{2r} m^r \\ A_1 &= [1+l-(1-k)m] \{ (1+l)g_1 + [2l(l+1)+(1-k)^2m]g_0 \} \\ A_0 &= (1+l)[1+l-(1-k)m]^2 g_0. \end{aligned}$$

Die Variablen l und m treten in den Koeffizienten A_n ebenfalls bis zu höchstens 6. Potenz auf.

Soweit es gelang, die Koeffizienten in Faktoren aufzuspalten, ist dies geschehen, um sie kürzer darzustellen. Die übrigen wurden nach Potenzen von m geordnet mit den Koeffizienten a_{ir} , wobei sich der erste Index ($i = 2, 3, 4$) auf den zugehörigen Grad in x , der zweite auf den zugehörigen Grad in m bezieht. Die 21 a_{ir} sind also nur noch Polynome in den 2 Variablen k und l . Zu A_4 gehören

$$\begin{aligned} a_{40} &= (1+l)^2 [-1-8k+4k^2+8k^3+k^4+4(-2+2k-2k^2+4k^3+k^4)l \\ &\quad + 2(3-6k+3k^2+10k^3-4k^4)l^2+4k^2(3-2k)l^3], \\ a_{41} &= 2(1+l)[2+4k-12k^2-11k^3+16k^4+3k^5 \\ &\quad + (5-19k+22k^2-43k^3+33k^4+10k^5)l \\ &\quad + (-11+26k-30k^2-15k^3+53k^4-11k^5)l^2 \\ &\quad + (6-15k-2k^2+29k^3-8k^4-2k^5)l^3+2k^2(3-2k)l^4], \\ a_{42} &= (1-k)[-2+12k+5k^2+35k^3-59k^4-15k^5 \\ &\quad + 2(7+7k-7k^2+45k^3-78k^4-22k^5)l \\ &\quad + 4(3-7k+19k^2-6k^3-47k^4+2k^5)l^2 \\ &\quad + 2(-13+25k-7k^2-47k^3-14k^4+8k^5)l^3 \\ &\quad + (6-12k-21k^2-7k^3+11k^4-k^5)l^4], \\ a_{43} &= 2(1-k)^2 [-3-3k+k^2-9k^3+28k^4+10k^5 \\ &\quad + 2(-3+6k-11k^2+2k^3+33k^4+9k^5)l \\ &\quad + (9-12k-15k^2+49k^3+44k^4-3k^5)l^2 \\ &\quad + (-6+3k+16k^2+12k^3-k^5)l^3], \\ a_{44} &= (1-k)^3 [4-6k+10k^2-29k^4-15k^5 \\ &\quad + 2(-3+3k+15k^2-15k^3-29k^4-7k^5)l \\ &\quad + (6+12k-12k^2-30k^3-13k^4+k^5)l^2], \\ a_{45} &= 2(1-k)^4 (1+k)[1-2k-k^2+k^3+3k^4+k(1+k)(-3+3k+k^4)l], \\ a_{46} &= k^2(1-k)^6 (1+k)^2. \end{aligned}$$

Zu A_3 gehören

$$\begin{aligned} a_{30} &= 2(1+l)^2 [-1+3k^2+k^3+(2k+3k^2+3k^3)l \\ &\quad + (3-3k+9k^2-2k^3-k^4)l^2+(-1+3k+2k^2-4k^3)l^3-k^2l^4], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_{31} &= (1+l) [3 - 5k - 19k^2 + 17k^3 + 12k^4 + (-6 - 2k - 15k^2 + 18k^3 + 35k^4)l \\
 &\quad + (-10 + 28k - 63k^2 + 88k^3 + 5k^4 - 8k^5)l^2 \\
 &\quad + (13 - 30k + 25k^2 + 40k^3 - 26k^4 - 2k^5)l^3 \\
 &\quad + (-4 + 11k + 6k^2 - 11k^3 - 2k^4)l^4 - 2k^2l^5], \\
 a_{32} &= 2 + 2k + 9k^2 - 42k^3 + k^4 + 30k^5 \\
 &\quad + (8 - 16k + 23k^2 - 91k^3 - 3k^4 + 89k^5)l \\
 &\quad + (-13 + 11k + 16k^2 - 174k^3 + 129k^4 + 63k^5 - 12k^6)l^2 \\
 &\quad + (-18 + 47k - 100k^2 - 2k^3 + 118k^4 - 17k^5 - 8k^6)l^3 \\
 &\quad + (11 - 33k - k^2 + 44k^3 + 2k^4 - 13k^5)l^4 + (-2 + 5k + k^2 + k^3 - 3k^4)l^5, \\
 a_{33} &= (1-k) [-2 + k + 8k^2 + 19k^3 + 6k^4 - 40k^5 \\
 &\quad + 2(4 - 3k + 5k^2 + 38k^3 - 17k^4 - 43k^5)l \\
 &\quad + (15 - 39k + 82k^2 + 38k^3 - 113k^4 - 39k^5 + 8k^6)l^2 \\
 &\quad + (-13 + 29k + 30k^2 - 54k^3 - 35k^4 + 9k^5 + 2k^6)l^3 \\
 &\quad + (1+k)(4 - 7k - k^2 - 2k^3 + 2k^4)l^4], \\
 a_{34} &= (1-k)^2 [k(-1 - 6k - 9k^2 - 4k^3 + 30k^4) \\
 &\quad + (-3 + 10k - 23k^2 - 38k^3 + 40k^4 + 44k^5)l \\
 &\quad + (9 - 12k - 34k^2 + 17k^3 + 41k^4 + 11k^5 - 2k^6)l^2 \\
 &\quad + (-2 - 5k + 5k^2 + 10k^3 + 3k^4 - k^5)l^3], \\
 a_{35} &= (1-k)^3 (1+k) [-1 + 2k - 2k^2 + 11k^3 - 12k^4 \\
 &\quad + (-3 + 3k + 10k^2 - 3k^3 - 11k^4)l + k(1+k)(3 - 3k - k^2)l^2], \\
 a_{36} &= k(1-k)^4 (1+k)^2 (1 - 2k - k'l).
 \end{aligned}$$

Zu A_3 gehören

$$\begin{aligned}
 a_{40} &= (1+l)^2 [-1 + 8k + 6k^2 + 4(2 + 2k + 3k^2)l + 2(2 + 4k + 3k^2 - 6k^3)l^2 \\
 &\quad + 4(-2 + 4k - 5k^2 - 2k^3)l^3 + (1 - 4k - 8k^2)l^4], \\
 a_{41} &= 2(1+l) [k(-11 + 5k + 18k^2) + (-9 + 4k + 2k^2 + 45k^3)l \\
 &\quad + (4 - 7k + 22k^2 + 53k^3 - 24k^4)l^2 + (10 - 23k + 60k^2 - 15k^3 - 20k^4)l^3 \\
 &\quad + (-8 + 20k - 5k^2 - 17k^3 - 2k^4)l^4 + (1 - 3k - 4k^2)l^5], \\
 a_{42} &= 5 - 4k - 21k^2 - 58k^3 + 90k^4 + 2(1 - 20k - 10k^2 - 76k^3 + 135k^4)l \\
 &\quad + (-30 + 22k - 143k^2 - 28k^3 + 371k^4 - 72k^5)l^2 \\
 &\quad + 2(5 - 16k - 64k^2 + 122k^3 + 55k^4 - 42k^5)l^3 \\
 &\quad + (34 - 100k + 111k^2 + 86k^3 - 51k^4 - 20k^5)l^4 \\
 &\quad + 2(-5 + 14k + 8k^2 - 6k^3 - 5k^4)l^5 + (1 - k)^2 l^6, \\
 a_{43} &= 2(1-k) [-1 + 12k - k^2 + 26k^3 - 60k^4 + (9 + 2k + 29k^2 + 14k^3 - 150k^4)l \\
 &\quad + (-1 + 6k + 56k^2 - 98k^3 - 131k^4 + 24k^5)l^2 \\
 &\quad + 2(-7 + 23k - 21k^2 - 47k^3 - 4k^4 + 8k^5)l^3 \\
 &\quad + (10 - 16k - 23k^2 - 4k^3 + 7k^4 + 2k^5)l^4 - (1 - k^2)l^5], \\
 a_{44} &= (1-k)^2 [-5 - 2k - 11k^2 - 8k^3 + 90k^4 \\
 &\quad + 4(-2 + 2k - 16k^2 + 20k^3 + 45k^4)l \\
 &\quad + 2(3 - 23k + 3k^2 + 81k^3 + 44k^4 - 6k^5)l^2 \\
 &\quad + 2(-9 + 2k + 26k^2 + 20k^3 + k^4 - 2k^5)l^3 + (1+k)(1 + 3k - 2k^2)l^4], \\
 a_{45} &= 2(1-k)^3 (1+k) [1 - 2k + 11k^2 - 18k^3 + k(8 + k - 27k^2)l \\
 &\quad + (3 + 3k - 11k^2 - 7k^3)l^2 - k(1+k)l^3], \\
 a_{46} &= (1-k)^4 (1+k)^2 [(1 + kl)^2 - 6k(1-k)(1+l)].
 \end{aligned}$$

Die Ausdrücke g_0 und g_1 in A_0 und A_1 sind schließlich

$$\begin{aligned} g_0 = & (1+l) [1-2l+(1-4k)l^2] + 2[2k+(1+k)l+2(-1+2k-2k^2)l \\ & +(1-3k)l^3]m + [-2(1-3k^2)+4(1-k+2k^2)l+(-5+14k-k^2-4k^3)l^2 \\ & +(1-k^2)l^3]m^2 - 2(1-k^2)[2k-(1-3k)l+(1-k)l^2]m^3 \\ & +(1-k^2)^2(1+l)m^4. \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} g_1 = & 2(1+l)[1+2k+(-1+2k-6k^2)l^2-2k^3l^3] \\ & +[-3+19k^2+2(3-3k+14k^2)l+(5-12k+43k^2-32k^3)l^2 \\ & +2(-2+5k-k^2-8k^3)l^3-4k^2l^4]m+2[2(-1-k-4k^2+9k^3) \\ & +(-2+5k-18k^2+29k^3)l+(7-18k+15k^2+20k^3-14k^4)l^2 \\ & +(-1+3k+5k^2-3k^3-2k^4)l^3]m^2+(1-k)[2(1+k-3k^2-17k^3) \\ & +2(-7+11k-7k^2-25k^3)l+(7-9k-27k^2+k^3+8k^4)l^2]m^3 \\ & +2(1-k^2)(1+k)[1-k+8k^2+(-3+2k+9k^2)l+k(1-k)l^2]m^4 \\ & +(1-k)^3(1+k)^2(1-3k-2k^2)l)m^5. \end{aligned}$$

Es sei noch bemerkt, daß A_1 den Faktor 2 enthält wie die anderen Koeffizienten mit ungeradem Index A_3 und A_5 , wenn er auch in dieser Darstellung nicht explizit in Erscheinung tritt.

Die Gl. (14) ist nicht in 2 Gleichungen dritten Grads in x mit in k, l, m ganzen rationalen Koeffizienten zerlegbar, obwohl sich die Koeffizienten A_0, A_5, A_1, A_4 in der oben stehenden Weise darstellen, worauf man eine gewisse Erwartung der Zerlegbarkeit gründen könnte. Der Koeffizient A_4 erfüllt jedoch nicht die dazu notwendige Bedingung. Man erkennt dies am einfachsten im Spezialfall $k=0$. Für ihn geht f_0 in $(1+k^2)b_0$ über und A_4 müßte für $k=0$ den Faktor $\lim_{k \rightarrow 0} b_0 = 1 + (1+m)(l-m)$ enthalten, was nicht der Fall ist. Der Grad der Gleichung ist, wenn die Koeffizienten der Faktoren ganze rationale Funktionen von k, l, m sein sollen, im Allgemeinfall nicht mehr reduzierbar.

§ 3. Der Sonderfall des senkrechten Hauptstoßes

Für den senkrechten Hauptstoß, für den $\delta=0, \delta_b=-\delta_a, \omega_{n_1}^2=\omega_1^2, m=l$ gilt, reduziert sich Gl. (14) auf das Quadrat folgender Gleichung 3. Grads in x :

$$(1-k^2)x^3 + [1-2k-k^2+(-1-k+k^2-k^3)l]x^2 + [-1-2k+(-2+k-2k^2)l \\ + k(1-k)l^2]x - (1+l)[1-(1-k)l] = 0, \quad (16)$$

wobei der dann allen Koeffizienten $A_6 \dots A_0$ gemeinsame Faktor $(1+k)l^4$ weggelassen wurde. Eine äquivalente Gleichung wurde schon von A. Weise⁹ für die Variable $\omega_{n_1}^2$ angegeben.

Gl. (16) ist in l vom 2. Grad. Wenn man in der Lage ist, x vorzugeben, erhält man die eine physikalisch brauchbare Wurzel dieser Gleichung

$$l = x + \frac{T + \sqrt{T^2 + U}}{2(1-k)(1+kx)}$$

mit

$$T = x(1+x) + (1+kx)[k + (-1+k+k^2)x], \\ U = 4(1-k)(1+kx)^3[1 + (1+k)x].$$

Da ein physikalisch brauchbares $l \geq x$ sein muß, ist die andere Lösung mit dem negativen Vorzeichen vor der Wurzel unbrauchbar.

§ 4. Der Sonderfall „ein Nebenstoß ist zur Machschen Linie entartet“

a) Der vordere Nebenstoß wird Machsche Linie. Dies bedeutet $x = 0$, denn dann wird nach (4) die „Stoßstärke“ des vorderen Nebenstoßes $\omega_{n_1}^2 = 1$. Aus Gl. (14) folgt für $x = 0$ die Bedingung $A_0 = 0$. Da die beiden ersten Faktoren in A_0 im physikalisch sinnvollen Bereich $0 \leq m \leq l$ nicht verschwinden, muß der letzte Faktor $g_0 = 0$ sein (s. Gl. 15). Diese Gleichung ist 4. Grads in m bzw. 3. Grads in l . Zeichnet man in einem δ, δ_a -Diagramm Kurven konstanter Anströmgeschwindigkeit $\omega_1^2 = \text{const.}$ ($l = \text{const.}$) für den Gabelstoß, so gibt $g_0 = 0$ die Fußpunkte dieser Kurven auf der δ -Achse des Diagramms. (S. Abb. 2.)

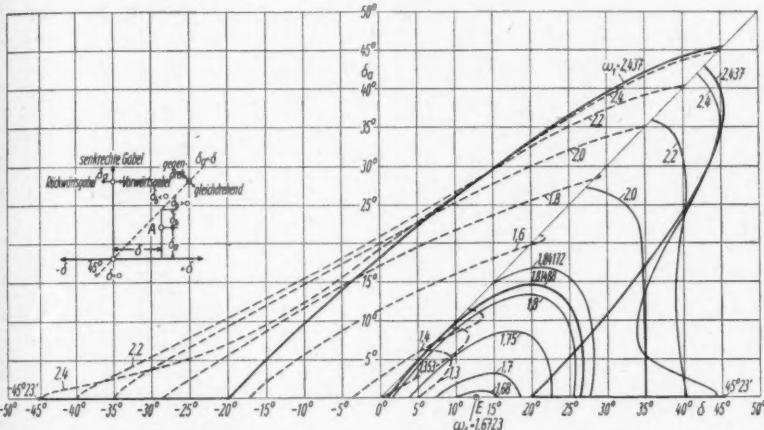


Abb. 2. stellt ein δ, δ_a -Diagramm für Luft $x = 1,405$ dar. Es wurde der Abhandlung von A. Weise, Jahrbuch der deutschen Luftfahrtforschung 1943 II AO 11 entnommen und mit einigen ergänzenden Kurven versehen ($\omega_1 = 1,68$ bis $\omega_1 = 1,84172$ und $\omega_1 = \omega_{\max} = 2,437$). Die ergänzenden Kurven hat Herr cand. phys. Th. Vollmer in seiner Diplomarbeit aus Gl. (13) berechnet. Die Ergänzungen entsprechen im wesentlichen denjenigen von Fr. Wecke in l. c. ³⁾. Die Zahlen an den Kurven bedeuten die Werte der dimensionslosen Anströmgeschwindigkeit ω_1 , die für jede Kurve konstant ist. Zur Kurve $\omega_1 = 2,437$ gehören die Achsenabschnitte von \pm etwa 20° bis $45,4^\circ$ auf der δ -Achse als Kurvenbestandteile hinzu. Die Ablenkungswinkel $\delta, \delta_a, \delta_s$ der Strömungen an der Gabel entnimmt man der Zeichnung in der Art, wie es die Skizze links andeutet. Punkt A dieser Skizze bedeutet einen Kurvenpunkt im Diagramm. Oberhalb der Geraden $\delta_s = \delta$ wird der Winkel δ_s negativ

b) Der hintere Nebenstoß wird Machsche Linie. Dies bedeutet $x = m$, denn dann wird die Stoßstärke des vorderen Nebenstoßes $\omega_{n_1}^2$ gleich der des Hauptstoßes $\omega_{n_1}^2$ und der hintere Nebenstoß muß zur Machschen Linie entarten. Aus Gl. (11) folgt für $x = m$

$$B(m) C^2(m) = 4 (1 + m) [1 + l - (1 - k) m]^2 b_0 m^2 (l - m) A(m), \quad (17)$$

wobei die Funktionen $B(m)$ und $C(m)$ Faktordarstellungen erlauben, nämlich

$$B(m) = b_0 [1 + (1 + k) m],$$

$$C(m) = m [1 + l - (1 - k) m] \{m [1 - l + (1 + k) m] - 2 (l - m)\},$$

die zu Vereinfachungen führen. $A(m)$ entnimmt man aus den Gln. (10) und erhält für (17)

$$\begin{aligned} & [1 + (1 + k)m] \{m[1 - l + (1 + k)m] - 2(l - m)\}^2 \\ & = 4(1 + m)(l - m)(1 + km)[(1 + m)(l - m) - m(1 + km)] \end{aligned}$$

oder nach Herausheben eines Faktors m^2 die Gleichung 3. Grads für m

$$Q_3 m^3 + Q_2 m^2 + Q_1 m + Q_0 = 0 \quad (18)$$

mit $Q_3 = (1 + k)(1 - k)^2$, $Q_2 = 3 - 2k + 3k^2 + 2(-1 + 2k + k^2)l$,

$$Q_1 = (3 - l)[1 + k - (1 - 3k)l]$$

$$Q_0 = 1 - 2l + (1 - 4k)l^2.$$

Aus den Wurzeln m von (18), soweit sie im physikalisch sinnvollen Bereich $0 \leq m \leq l$ liegen, gewinnt man die Endpunkte der Kurven konstanter Anströmgeschwindigkeit im oben erwähnten δ , δ_a -Diagramm auf der Linie $\delta = \delta_a$. Da (18) vom 2. Grad in l ist, hat man bei Vorgabe von m sofort 2 Lösungen für

$$l = m + \frac{(1 + k)m[1 + (1 - k)m \pm 2\sqrt{k(1 + m)(1 + km)}]}{1 - 4k + (1 - 3k)m}, \quad (19)$$

die physikalisch sinnvoll sind, wenn $l \geq m$ wird.

§ 5. Sonderfall des senkrechten hinteren Nebenstoßes: $x' = l'$.

In diesem Falle gelten 2. simultane Gleichungen: 1. $\delta_b = 0$, d. h. $A(x) = 0$ und 2. $\delta_a = \delta$, d. h. $C(x) = 0$, da hier $x \neq m$ ist. Da außerdem im physikalisch sinnvollen Bereich $1 + kx \neq 0$ ist, so bedeuten $A(x) = 0$ und $C(x) = 0$:

$$x^2 + (1 - l + km)x - (l - m) = 0$$

$$b_0 x^2 - (l - m)[b_0 + (1 - k^2)m^2]x - m(l - m)(1 + l) = 0.$$

Aus diesen beiden Gleichungen kann man durch Elimination des in x quadratischen Glieds bzw. des Absolutglieds 2 lineare Gleichungen für x gewinnen, die neben x auch eine Beziehung zwischen l und m ergeben:

$$\begin{aligned} x &= \frac{(l - m)[b_0 - m(1 + l)]}{[1 - (1 - k)m]b_0 + (1 - k^2)m^2(l - m)} \\ &= \frac{m(1 + l)(1 - l + km) + (l - m)[b_0 + (1 - k^2)m^2]}{b_0 - m(1 + l)}. \end{aligned} \quad (20)$$

Die Gleichheit obiger 2 Brüche bedeutet eine Gleichung 4. Grads in m bzw. 2. Grads in l , da sich ein Faktor $m(1 + k l)$ herausheben lässt. Schreibt man sie

$$\sum_{j=0}^4 R_j m^j = 0, \quad (21)$$

so sind die Koeffizienten R_j

$$R_4 = (1 - k)^2(1 + k), \quad R_3 = (1 - k)^2(4 + k - l), \quad R_2 = (1 - k)[-3k - (4 - k)l],$$

$$R_1 = (1 - k)(-3 - 2l + l^2), \quad R_0 = (1 + l)^2.$$

Gibt man l vor, so kann man m als Wurzel von (21) und danach x aus einer der Gln. (20) berechnen, wobei die Bedingung $0 \leq x \leq m \leq l$ beachtet werden muß. Man erhält damit den Schnittpunkt (im Gegensatz zu den Endpunkten in § 4) der Kurven konstanter Anströmgeschwindigkeit im δ , δ_a -Diagramm mit

der Linie $\delta = \delta_a$. Einfacher ist die Berechnung von l bei Vorgabe von m , es ist

$$l = m + \frac{-2(1+k)m + (1-k)m^2[2-k+(1-k)m] - (1-k)m\sqrt{m\Delta}}{2[1+(1-k)m]} \quad (22)$$

mit

$$\Delta = 4(1-k)(1+m)[-1+(1-k)m] + m[k-(1-k)m]^2.$$

Für $m \rightarrow l$ geht Gl. (21) über in $(1+l)(1+k)l[1-(1-k)l]^2 = 0$. Dabei bedeutet das Verschwinden des Faktors in der eckigen Klammer die Bedingung für den senkrechten Hauptstoß, senkrechten hinteren Nebenstoß und Machsche Linie als vorderen Nebenstoß. Daher ist dieser Faktor auch im Absolutglied von (16) enthalten. Zu $l = 1/(1-k)$ gehört $\omega_1^2 = 2-k$, die kleinste Anströmgeschwindigkeit, für die ein senkrechter Gabelstoß existiert.

§ 6. Sonderfall maximaler Anströmgeschwindigkeit.

Wenn die Anströmgeschwindigkeit maximal ist, so wird $\omega_1^2 = \omega_{\max}^2 = 1/k$ und $l \rightarrow \infty$. Da in $\operatorname{tg}^2 \delta$ und $\operatorname{tg}^2 \delta_a$ im Zähler l linear, im Nenner quadratisch auftreten, sind δ bzw. δ_a Null für alle endlichen m bzw. x , wenn $l \rightarrow \infty$ geht.

Fall a. Sollen beide Winkel δ, δ_a von 0 verschieden sein, so müssen auch $m \rightarrow \infty$ und $x \rightarrow \infty$ gehen. Dann werden die Quotienten $\mu = m/l$ und $\xi = x/l$ in allgemeinen endlich und für die Winkel und Druckverhältnisse vereinfachen sich die Formeln zu

$$\operatorname{tg}^2 \delta = \frac{(1-k)^2 \mu (1-\mu)}{[1-(1-k)\mu]^2} \quad \text{und} \quad \operatorname{tg}^2 \delta_a = \frac{(1-k)^2 \xi (1-\xi)}{[1-(1-k)\xi]^2} \quad \text{mit } 0 \leq \xi \leq \mu \leq 1,$$

$$\frac{\Pi}{l} \rightarrow (1+k)\mu, \quad \frac{\Pi_a}{l} \rightarrow (1+k)\xi, \quad \Pi_b \rightarrow \frac{\mu}{\xi}, \quad (23)$$

so daß wie bisher $\Pi = \Pi_a \Pi_b$ erfüllt ist, obwohl Π und $\Pi_a \rightarrow \infty$ gehen, jedoch Π_b endlich bleibt.

Fall b. Der Winkel δ_a sei Null, während $\delta \neq 0$ ist, d. h. x sei endlich, jedoch $m = \infty$, so gilt

$$\frac{\Pi}{l} \rightarrow (1+k)\mu \quad \Pi_a = 1 + (1+k)x \quad \frac{\Pi_b}{l} \rightarrow \frac{(1+k)\mu}{1 + (1+k)x}, \quad (24)$$

so daß wegen $l \rightarrow \infty \Pi$ und $\Pi_b \rightarrow \infty$ gehen, aber der Quotient $\Pi_a = \Pi/\Pi_b = 1 + (1+k)x$ endlich bleibt. $\operatorname{tg}^2 \delta$ berechnet sich aus obiger Formel und $\operatorname{tg}^2 \delta_a$ ist 0.

Zu a. Um eine Gleichung zwischen endlichen Größen zu erhalten, muß man die Gl. (14) für den Gabelstoß mit l^{10} dividieren und $l, m, x \rightarrow \infty$ wachsen lassen. Die höchsten Potenzen in den einzelnen Summanden sind $m^4 x^6, m^5 x^5, m^6 x^4, l m^4 x^3, l^2 m^6 x^2, l^2 m^8 x, l^2 m^9$. Die zwei letzten werden beim Grenzübergang des Falles a) von niedrigerem Grad ∞ als die übrigen, die sich wie ∞^{10} verhalten. Also reduziert sich für $\omega_1 = \omega_{\max}$ die Gleichung 6. Grads auf den 4. Grad:

$$\lim_{l, m, x \rightarrow \infty} l^{-10} \{A_6 x^6 + A_5 x^5 + A_4 x^4 + A_3 x^3 + A_2 x^2 + A_1 x + A_0\}$$

$$= \lim_{l, m \rightarrow \infty} \left\{ \frac{A_6}{l^4} \xi^4 + \frac{A_5}{l^5} \xi^3 + \frac{A_4}{l^6} \xi^2 + \frac{A_3}{l^7} \xi + \frac{A_2}{l^8} \right\} \xi^2 = 0.$$

Greift man die Glieder höchster Potenz in den Koeffizienten A_6 bis A_0 heraus, so findet man, daß sie für $l, m \rightarrow \infty$ den gemeinsamen Faktor μ enthalten, den man

im Grenzfall noch aus der Gleichung herausheben kann. Man definiert daher die neuen Koeffizienten folgendermaßen:

$$B_4 \rightarrow \frac{1}{\mu} \frac{A_4}{l^4}, \quad B_3 \rightarrow \frac{1}{\mu} \frac{A_3}{l^3}, \quad B_2 \rightarrow \frac{1}{\mu} \frac{A_2}{l^2}, \quad B_1 \rightarrow \frac{1}{\mu} \frac{A_1}{l}, \quad B_0 \rightarrow \frac{1}{\mu} \frac{A_0}{l},$$

wobei der Pfeil $\lim l, m \rightarrow \infty$ bedeuten soll. Die Gleichung 4. Grads für den Sonderfall maximaler Anströmgeschwindigkeit $\omega_1 = \omega_{\max}$ lautet also

$$\sum_{n=0}^4 B_n \xi^n = 0 \quad (25)$$

mit

$$B_4 = (1-k)^2 [1 - (1-k^2)\mu] [4k^2 + (1-k)(1-k-4k^2)\mu - (1+k)(1-k^3)\mu^2],$$

$$B_3 = 2(1-k) [1 - (1-k^2)\mu] \{ [-2 + k + k(1-k)\mu] \\ \cdot [4k^2 + (1-k)(1-k-4k^2)\mu - (1+k)(1-k^3)\mu^2] \\ + k^2(1-k)[2 - (1-k)\mu] \},$$

$$B_2 = 4k^2(3-2k) + (1-k)(6-12k-21k^2-7k^3+11k^4-k^5)\mu \\ + 2(1-k^2)(-6+3k+16k^2+12k^3-k^5)\mu^2 \\ + (1-k)^3(6+12k-12k^2-30k^3-13k^4+k^5)\mu^3 \\ + 2k(1+k)^2(1-k)^4(-3+3k+k^3)\mu^4 + k^2(1+k)^2(1-k)^6\mu^5,$$

$$B_1 = 2 \{ -2k^2 + (-2+5k+k^2+k^3-3k^4)\mu \\ + (1-k^2)(4-7k-k^2-2k^3+2k^4)\mu^2 \\ + (1-k)^3(-2-5k+5k^2+10k^3+3k^4-k^5)\mu^3 \\ + k(1+k)^2(1-k)^3(3-3k-k^3)\mu^4 - k^2(1+k)^2(1-k)^5\mu^5 \},$$

$$B_0 = (1-k)^2\mu [1 - (1+k)\mu + k(1-k^2)\mu^2]^2.$$

Für die Koeffizienten B_4, B_3, B_0 wurde eine Faktordarstellung analog zur Darstellung von A_6, A_5, A_0 gewählt. Natürlich ist diese Gleichung als Gleichung 4. Grads in ξ explizit lösbar.

Betrachten wir noch die Sonderfälle, die zu einer weiteren Reduktion des Grads der Gl. (25) führen.

α) Der senkrechte Hauptstoß: $m = l, \mu = m/l = 1$. Das Absolutglied in Gl. (16) wird beim Grenzübergang $l, m, x \rightarrow \infty$ um einen Grad schwächer ∞ als die andern Glieder. Daher entartet sie zu einer quadratischen Gleichung

$$(1-k^2)\xi^2 + (-1-k+k^2-k^3)\xi + k(1-k) = 0. \quad (26)$$

Als physikalisch brauchbare Lösung ergibt sich

$$\xi = \frac{1+k-k^2+k^3-\sqrt{V}}{2(1-k^2)} \quad \text{mit} \quad V = 1-2k+3k^2+4k^3-k^4-2k^5+k^6$$

und

$$\operatorname{tg}^2 \delta_a = \frac{-1+k-6k^2+3k^4-k^6+(1+2k-k^3)\sqrt{V}}{2(1-k^2)}.$$

β) Der vordere Nebenstoß ist Machsche Linie: $\xi = 0, B_0 = 0$. Dieser Sonderfall stellt zugleich den Übergang zu Fall b) dar und wird weiter unten diskutiert.

Der hintere Nebenstoß ist Machsche Linie: $x = m, \xi = \mu$. Nach Division durch l^3 und Grenzübergang $l \rightarrow \infty$ wird das Absolutglied Q_0 in Gl. (18) einen Grad

schwächer unendlich als die übrigen Glieder. Daher reduziert sich (18) auf eine quadratische Gleichung

$$(1+k)(1-k)^2\mu^2 - 2(1-2k-k^2)\mu + (1-3k) = 0 \quad (27)$$

mit den beiden physikalisch brauchbaren Lösungen

$$\mu_1 = \xi = \frac{1}{1+k} \quad \text{bzw.} \quad \bar{\mu}_1 = \bar{\xi} = \frac{1-3k}{(1-k)^2}$$

und den zugehörigen Winkeln δ_a bzw. $\bar{\delta}_a$, für die

$$\operatorname{tg}^2 \delta_a = \frac{(1-k)^2}{4k}, \quad \text{d. h.} \quad \delta_a = \delta_{\max} \quad \text{bzw.} \quad \operatorname{tg}^2 \bar{\delta}_a = \frac{(1-k)^2}{4k} - k$$

gilt. Der größere Winkel $\delta_a = \delta_{\max}$ gehört zum Endpunkt des Kurvenastes $\omega_1 = \omega_{\max} = \text{const}$ im δ, δ_a -Diagramm, welcher zum Gebiet der gegendrehenden Gabeln gehört ($\delta_a > \delta$), der kleinere Winkel $\bar{\delta}_a$ zum Endpunkt des Kurvenastes, welcher zum Gebiet der gleichdrehenden Gabeln gehört ($\delta_a < \delta$), auf der Geraden $\delta_a = \delta$. Bemerkenswert ist, daß $\operatorname{tg}^2 \delta_a - \operatorname{tg}^2 \bar{\delta}_a = k$ ist.

γ) Im Sonderfall des senkrechten hinteren Nebenstoßes bleiben beim Grenzübergang $l, m \rightarrow \infty$ in Gl. (21) nur die beiden ersten Glieder erhalten und (21) reduziert sich auf eine lineare Gleichung, aus der $m = l/(1+k)$ hervorgeht. Aus der zweiten Gl. (20) wird nach Einsetzen der Werte (10) für b_0 das zugehörige x erhalten

$$\frac{x}{l} = \frac{1+l-(1-k)m}{1+l-(1-k)m[2+(1+k)m]} \quad (28)$$

und im $\lim l, m, x \rightarrow \infty$ folgt daraus $\xi = 1/(1+k) = \mu_1$. Hier fallen also im Bereich der gegendrehenden Gabeln die Sonderfälle „hinterer Nebenstoß ist senkrecht“ und „hinterer Nebenstoß ist Machsche Linie“ zusammen. Diese Tatsachen sind wohlbekannt, sie wurden hier nur nochmals als Spezialfälle der allgemeinen Gl. (14) bzw. (25) zusammengestellt.

Zu b). Ist x endlich, so wird $\lim_{l \rightarrow \infty} x/l = 0$ und man darf beim Grenzprozeß nur die Glieder von (14) berücksichtigen, für welche die Summe der Grade in l und m die höchste ist ohne Rücksicht auf den Grad von x . Die höchsten Potenzen in den Koeffizienten A_8 bis A_0 sind, geordnet nach fallenden Potenzen von x : $m^4, m^5, m^6, lm^6, l^2m^6, l^2m^6, l^2m^6$. Die ersten vier sind von niedrigerem Grade als die letzten drei, die sich wie ∞^8 verhalten. Nach Division durch l^8 verschwinden also im $\lim l, m \rightarrow \infty$, aber bei endlichem x , die ersten vier Koeffizienten in (14) und es bleibt nur

$$\lim_{l, m \rightarrow \infty} l^{-8} (A_8 x^8 + A_4 x^4 + A_0) = 0$$

übrig mit willkürlich wählbarem $0 \leq x < \infty$. Bei der Durchführung des Grenzprozesses erkennt man, daß ein gemeinsamer Faktor $(1-k)^2 \mu^2$ weggehoben werden kann und daß sich die Gleichung auf das Quadrat des folgenden, in x linearen Ausdrucks reduziert:

$$[1 - (1+k)\mu + k(1-k^2)\mu^2]x + 1 - 2\mu + (1-k^2)\mu^2 = 0. \quad (29)$$

Man darf den Grenzfall $x = \infty$ in den Bereich, in dem x frei wählbar ist, einschließen, denn er ist mit $\xi = 0$ des Falles a, Absatz β gleichbedeutend: sowohl $B_0 = 0$ (Fall a), als auch das Verschwinden des Koeffizienten von x in Gl. (29) im Fall b für $x \rightarrow \infty$ führen zu derselben Gleichung

$$1 - (1+k)\mu + k(1-k^2)\mu^2 = 0. \quad (30)$$

Damit ist der Anschluß der beiden Fälle aneinander hergestellt. Aus (30) folgt

$$\mu = \frac{1 + k - \sqrt{(1+k)(1-3k+4k^2)}}{2k(1-k^2)} = \mu(\infty)$$

und

$$\operatorname{tg}^2 \delta_\infty = \frac{(1+k)\sqrt{(1-k^2+4k^2)-1+2k-5k^2}}{2(1-k^2)}$$

für die 2 zu $\delta = 0$ symmetrisch liegenden Fußpunkte der Kurve $\omega_1 = \omega_{\max}$ auf der δ -Achse des δ , δ_a -Diagramms. Von diesen Fußpunkten aus nach absolut größeren Winkeln δ erstreckt sich das Lösungsgebiet für endliches x auf der δ -Achse bis δ_{\max} . Denn für ein beliebiges x ergibt Gl. (29) nach Umordnen nach Potenzen von μ eine Lösung $\mu = \mu(x)$ im physikalisch sinnvollen Bereich $0 < \mu < 1$

$$\mu(x) = \frac{2 + (1+k)x - \sqrt{W}}{2(1-k^2)(1+kx)} \quad (31)$$

mit $W = 4k^2[1 + (1+k)x] + (1+k)(1-3k+4k^2)x^2$.

Für $x = 0$ wird $\mu(0) = 1/(1+k)$ und $\operatorname{tg} \delta_0 = \pm (1-k)/(2\sqrt{k})$, $\delta_0 = \pm \delta_{\max}$. Sie stellen die äußeren Endpunkte der Lösungsstrecke für endliche x auf der δ -Achse des δ , δ_a -Diagramms dar. In diesem Bereich ist das Druckverhältnis Π_a im vorderen Nebenstoß endlich, das im hinteren Nebenstoß Π_b und im Hauptstoß Π unendlich. Variiert μ im Bereich $\mu(0) \leq \mu \leq \mu(\infty)$, so bestimmt man x aus (29) und damit Π_a aus Gl. (24). δ_a bleibt im ganzen Bereich 0, während $|\delta|$ von δ_{\max} nach δ_∞ auf der δ -Achse des δ , δ_a -Diagramms von außen nach innen läuft. Dabei ist bemerkenswert, daß $\mu(\infty)$ für kleine k nur noch um $\varepsilon \approx k^3/(1-k+2k^2)$ kleiner als 1 ist; dies hat zur Folge, daß μ längs der Kurve $\omega_1 = \omega_{\max}$ vom linken Fußpunkt auf der $-\delta$ -Achse d. h. von $-\delta_\infty$ bis zum Schnittpunkt mit der δ_a -Achse des δ , δ_a -Diagramms, wo $\mu = 1$ ist, nur sehr wenig variiert, nämlich von $1 - \varepsilon$ bis 1.

Anwendungen dieser Gleichungen sind in Vorbereitung. Für die Einführung in diesen Problemkreis bin ich Herrn Professor Dr. A. Weise zu Dank verpflichtet.

Stuttgart, Institut für Gasströmungen der Techn. Hochschule.

(Bei der Redaktion eingegangen am 24. Februar 1951.)

Verantwortlich

für die Schriftleitung: Prof. Dr. Friedrich Möglich, Berlin-Buch, Lindenberger Weg 74;
für den Anzeigenteil: Ernst Wöllnitz (Arbeitsgemeinschaft medizinischer Verlage G. m. b. H.),
Berlin C 2, Neue Grünstraße 18, Fernruf: 52 12 97. Z. Z. gilt Anzeigenpreisliste Nr. 2
Verlag: Johann Ambrosius Barth, Leipzig C 1, Salomonstr. 18 B, Fernruf: 63 105, 63 751
(IV/5/1) Paul Dünnhaupt, Köthen L 55/51

Lizenz-Nr. 410 / G.N. 446